Serie sui radicali

Semplifica

$\sqrt[12]{6^4}=\sqrt[3]{6}$ $\sqrt[18]{2^9}=\sqrt{2}$ $\sqrt[18]{16}=\sqrt[9]{4}$ $\sqrt[4]{729}=\sqrt{27}$ $\sqrt[8]{64}=\sqrt[4]{8}$

$\sqrt[4]{\frac{25}{16}}=\sqrt{\frac{5}{4}}$ $\sqrt[4]{5^2-4^2}=\sqrt{3}$ $\sqrt[6]{\frac{8}{27}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\sqrt[3]{0.008}=\frac{1}{5}$ $\sqrt[6]{0.04}=\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

$\sqrt[6]{\frac{1}{5}(1-\frac{6}{5}+\frac{6}{25})}=\sqrt{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[12]{(1+\frac{1}{2})(2+\frac{1}{4})}=\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$ $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\frac{1}{6}\sqrt{13}$

$\sqrt[6]{36x^4y^6z^2}=\sqrt[3]{6x^2y^3z}$ $\sqrt[3]{8a^6b^9}=2a^2b^3$ $\sqrt[6]{\frac{(x^2-1)^2}{9a^6b^4}}=\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{3a^3b^2}}$

$\sqrt[8]{\frac{3a^4x+a^4y}{12b^2x+4b^2y}}=\sqrt[4]{\frac{a^2}{2b}}$ $\sqrt[2n]{3^n\cdot 2^{3n}}=\sqrt{24}$ $\sqrt[3n+6]{2^{3n+6}\cdot 9^{n+2}}=\sqrt[3]{72}$

$\sqrt[n^2-1]{a^{n-1}b^{2n-2}}=\sqrt[n+1]{ab^2}$ $\sqrt[12]{a^6+6a^4+12a^2+8}=\sqrt[4]{a^2+2}$ $\sqrt[10]{a^4+6a^2x^2+9x^4}=\sqrt[5]{a^2+3x^2}$

$\sqrt[4]{\frac{a^5+4a^3+4a}{a^3b^6}}=\sqrt{\frac{a^2+2}{ab^3}}$ $\sqrt[9]{\frac{(1-x)^4}{(1-x^2)(x+1)^5}}=\sqrt[3]{\frac{1-x}{(1+x)^2}}$ $\sqrt[x-y]{\frac{2^{x^2+y^2}}{4^{xy}}}=2^{x-y}$

$\sqrt[x-1]{\frac{a^{3x^3}a^2}{a^{2x^2}a^{2x+1}}}=a^{x-1}$

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{81}}=\sqrt[9]{81}$ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2a^2}}=\sqrt[9]{2a^2}$ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{17}b^{36}}}=ab^3\sqrt[12]{a^5}$ $\sqrt[n]{\sqrt[n+1]{a^n}}=\sqrt[n+1]{a}$

$\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{a^4}}}=\sqrt[5]{a^2}$ $\sqrt[n]{a^2\cdot\sqrt[m]{a^n}}=\sqrt[mn]{a^{2m+n}}$ $\sqrt[n+1]{2\cdot\sqrt[n]{2a^{n+1}}}=\sqrt[n]{2a}$

Calcola

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=6$ $\sqrt{75}\cdot\sqrt{12}=30$ $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}=10$ $\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{30}=30$

$\sqrt{\frac{7}{10}}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{\frac{1}{21}}=\frac{1}{6}$ $\sqrt{\frac{35}{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{\frac{16}{5}}=\sqrt{48}$ $\sqrt{18}\div\sqrt{2}=3$

$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{32}}=\frac{3}{2}$ $\frac{\sqrt{\frac{35}{36}}}{\sqrt{\frac{7}{45}}}=\frac{5}{2}$ $\sqrt{3a}\div\sqrt{27a}=\frac{1}{3}$ $\frac{\sqrt{12(a+b)^3}}{\sqrt{3(a+b)}}$

$\sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2} = ab$ $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[4]{ab^3} = \sqrt{ab}$ $\sqrt[3]{a^nb^m} \cdot \sqrt{a^{2n}b^{3m}} \cdot \sqrt[6]{a^{4n}b^m} = a^{2n}b^{2m}$

$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot \sqrt[3]{a+1} \cdot \sqrt[5]{\frac{(1+a)^2}{(1-a)^3}} = \sqrt[30]{\frac{(1+a)^7}{(1-a)^3}}$ $\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x^2-1} \div \sqrt[6]{(x+1)^5} = \sqrt{x-1}$

$\sqrt{\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^5}$ $\sqrt{a \cdot \sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a}} = a\sqrt[4]{a}$ $\sqrt[4]{3x^2y\sqrt{2xy\sqrt[3]{2xy^3}}} \div \sqrt[12]{108} = \sqrt[6]{x^4y^3}$

Espressioni con radicali

$\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = 11$ $\sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{18}) = 10$ $\frac{\sqrt{63} - \sqrt{28} + \sqrt{35}}{\sqrt{7}} = 1 + \sqrt{5}$

$\sqrt{a}(\sqrt{a^3} + \sqrt{4a}) = a^2 + 2a$ $\sqrt[5]{a-b} \cdot \sqrt[5]{(a-b)^4} + (\sqrt[6]{a+b})^6 - \sqrt[4]{(2a-3b)^4} = 3b$

$[(\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} \div \sqrt[6]{\frac{x}{y^4}}) \cdot \sqrt[12]{x^{-5}y^{-4}}]^{12} = x$ $(\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} \div \sqrt[6]{\frac{x}{y^5}})^2 = xy$ $\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{a}{a-b}} = \sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{a(a-b)}}$

$\sqrt[3]{\frac{a^2+2a+1}{ab-b}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^2-2a+1}{ab+b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b^2(a-1)^2}{2a^2+4a+2}} = \sqrt[4]{\frac{(a-1)^2}{2}}$ $(3\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{64}{3}$

$\frac{(\sqrt{x-1})^3 \cdot \sqrt[3]{x^2-1}}{(\sqrt[6]{x+1})^2} = (x-1)\sqrt[6]{(x-1)^5}$ $(\frac{\sqrt{2+\sqrt{1+x}}}{\sqrt{2x}})^2 \cdot (\frac{x}{\sqrt[3]{4+2\sqrt{1+x}}})^3 = \frac{x^2}{4}$

Equazioni di primo grado con radicali

$x + \sqrt{3} = 2(x + \sqrt{3})$ $[-\sqrt{3}]$ $\sqrt{27}x - \sqrt{12} = \sqrt{3}(x+1)$ $[\frac{3}{2}]$ $x\sqrt{3} = x + 2\sqrt{3}$ $[3 + \sqrt{3}]$

$(2 - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 2x - \sqrt{3}(2\sqrt{2} + 1)$ $[\sqrt{2} + 1]$ $\frac{x - 2\sqrt{2} - 4}{6\sqrt{2}} + \frac{x + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{x+1}{3}$ $[1]$

$\frac{3\sqrt{3}}{x}(x - \sqrt{3}) - 3 = \sqrt{3}(\frac{1}{x} - 1)$ $[\sqrt{3} + 1]$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{x}$

1 Equazioni di secondo grado ad un'incognita

Nelle equazioni di secondo grado, l'incognita appare con l'esponente 2. Nella forma normale, un'equazione di secondo grado ha la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

Esempi: $5x^2+3x -4 = 0$ $\qquad$ $2x^2 = 8$

1.1 Interpretazione geometrica

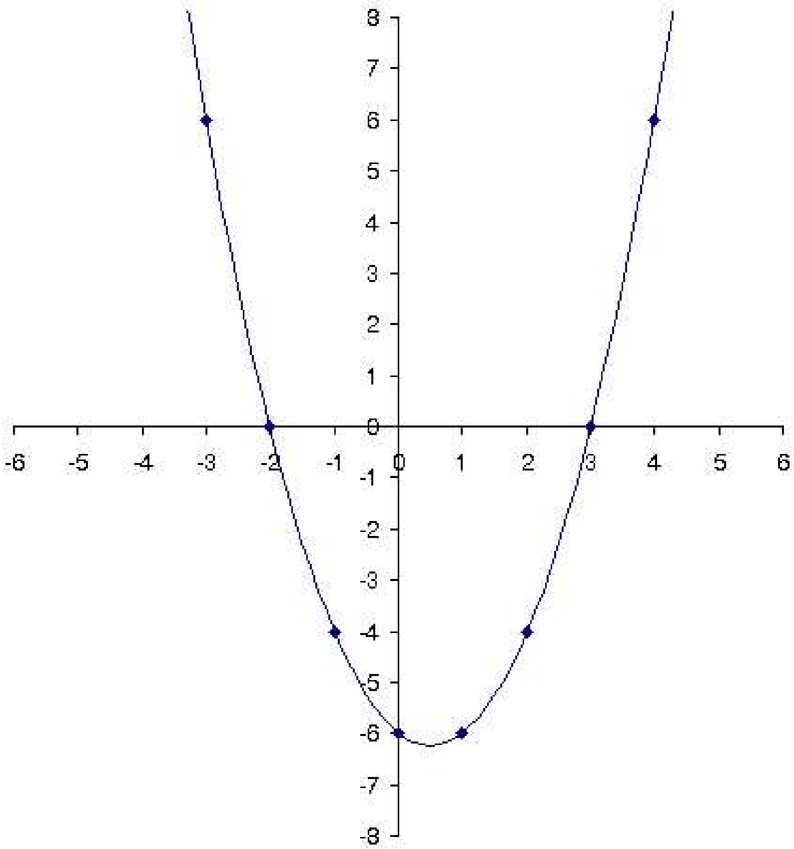
Esempio.
Consideriamo l'equazione

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Possiamo risolverla graficamente interpretandola come uguaglianza di due funzioni.(le funzioni verranno trattate nel prossimo capitolo, ma qualcuno si ricorderà certamente ....)

$x^2 - x - 6 =$	0
$= f(x)$	$= g(x)$
parabola	retta orizzontale coincidente con l'asse O_x

Rappresentando le due funzioni nel piano cartesiano, le soluzioni sono date dalle coordinate x dei punti d'intersezione tra le due funzioni.



Le soluzioni dell'equazione sono: ....

1.2 Risoluzione di un'equazione di secondo grado mediante scomposizione in fattori

Cercheremo di illustrare quali sono le operazioni algebriche che, facendoci passare attraverso una serie di equazioni equivalenti a quella data, ci permettono di calcolare le soluzioni e cioè, quei valori dell'incognita che verificano l'equazione.

Si utilizza questo metodo quando l'equazione data è facilmente riconoscibile come prodotto di due polinomi di primo grado.

Si potrà così risolvere l'equazione uguagliando a zero ciascun fattore e determinando poi

la soluzione delle due equazioni di 1 grado così ottenute (questo procedimento è giustificato dal fatto che il prodotto di 2 numeri è nullo se almeno uno dei fattori è nullo). Vale la seguente proprietà:

Se m e n sono due numeri reali, allora:

$$m \bullet n = 0 \text{ Se e solo se m} = 0 \text{ oppure n} = 0$$

1.2.1 Esempio 1: $x^2 - 4x + 3 = 0$ (trinomio tipico)

$(x - 3)(x - 1) = 0$

Ora si uguagliano a zero i due fattori e si risolvono le due equazioni di 1 grado risultanti:

$(x - 3)(x - 1) = 0$

$(x - 3) = 0$ $(x - 1) = 0$

$x_1 = 3$ $x_2 = 1$

Soluzioni: $x_1 = 3$; $x_2 = 1$

1.2.2 Esempio 2: $3x^2 - 9x = -6$

$3x^2 - 9x + 6 = 0$

$3(x^2 - 3x + 2) = 0$ (messa in evidenza)

$3(x - 2)(x - 1) = 0$ (trinomio tipico)

$(x - 2)(x - 1) = 0$

Soluzioni: $x_1 = 2$; $x_2 = 1$

1.2.3 Esempio 3: $3x^2 = -3x$

$3x^2 + 3x = 0$

$3x(x + 1) = 0$

$x(x + 1) = 0$

Soluzioni: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$

1.2.4 Esercizi: risolvi le seguenti equazioni.

1.	$4x^2 = 9$
2.	$5x^2 = 4x$
3.	$x^2 - 14x = -24$
4.	$x^2 - 8x = -16$
5.	$x^2 - 3x = 10$
6.	$x^2 - 56 = -x$
7.	$-3x^2 + 33x = 90$
8.	$(2x^2 + 4)(x^2 - 1) = (4x^2 + 2)(x^2 - 2)$
9.	$2x^4 + 50 = 52x^2$
10.	$x^2(x^2 - 170) + 169 = 0$

1.2.5 Soluzioni:

1.	$S = \{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\}$
2.	$S = \{0; \frac{4}{5}\}$
3.	$S = \{2; 12\}$
4.	$S = \{4\}$
5.	$S = \{-2; 5\}$
6.	$S = \{-8; 7\}$
7.	$S = \{5; 6\}$
8.	$S = \{-2; 0; 2\}$
9.	$S = \{-5; -1; 1; 5\}$
10.	$S = \{-13; -1; 1; 13\}$

1.3 Risoluzione algebrica dell'equazione di 2° grado

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \,\big|\bullet 4a \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \,\big|+b^2 \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 &= b^2 \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac \\
(2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \\
2ax + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\
2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

1.4 Soluzioni di un'equazione di secondo grado

Se un'equazione è di grado n, essa ammetterà n radici fra reali, immaginarie, distinte coincidenti; per cui **un'equazione di 2 grado ammetterà 2 soluzioni**. Tuttavia non tutte le soluzioni sono reali (in $\mathbb{R}$). Si trovano quindi tre casi, esemplificati qui sotto.

1.4.1 Esempi:

a) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

2 soluzioni reali distinte

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

1 soluzione reale doppia (2 soluzioni reali e coincidenti)

c)$2x^2 + 5x + 10 = 0$

2 soluzioni immaginarie, in R $S = \{\emptyset\}$

Da questi tre esempi possiamo notare che le soluzioni possibili di un'equazione di 2 grado, dipendono dall'espressione sotto il segno di radice:

$$b^2 - 4ac = \Delta Discriminante$$

$$\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$	soluzioni reali e distinte
$\Delta = 0$	una soluzione doppia
$\Delta < 0$	nessuna soluzione reale

Osservazione: se x_1 e x_2 sono soluzione dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ allora

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

1.4.2 Esercizi:

a) Risolvi le seguenti equazioni con la formula risolutiva.

1.	$6x^2 - x = 2$	$S = \{-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\}$	2.	$5x^2 + 13x = 6$	$S = \{-3; \frac{2}{5}\}$
2.	$x^2 + 4x + 2 = 0$	$S = \{-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}\}$	4.	$x^2 - 6x - 3 = 0$	$S = \{3 - 2\sqrt{3}; 3 + 2\sqrt{3}\}$
5.	$2x^2 - 3x - 4 = 0$	$S\{\frac{3-\sqrt{41}}{4}; \frac{3+\sqrt{41}}{4}\}$	6.	$3x^2 + 5x + 1 = 0$	$S = \{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}; \frac{-5+\sqrt{13}}{6}\}$
7.	$\frac{3}{2}x^2 - 4x + 1 = 0$	$S = \{\frac{4-\sqrt{10}}{3}; \frac{4+\sqrt{10}}{3}\}$	8.	$\frac{5}{3}x^2 + 3x + 1 = 0$	$S = \{\frac{-9-\sqrt{21}}{10}; \frac{-9+\sqrt{21}}{10}\}$
9.	$\frac{5}{x^2} - \frac{10}{x} + 2 = 0$	$S = \{\frac{5-\sqrt{15}}{2}; \frac{5+\sqrt{15}}{2}\}$	10.	$\frac{x+1}{3x+2} = \frac{x-2}{2x-3}$	$S = \{\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\}$
11.	$4x^2 + 81 = 36x$	$S = \{\frac{9}{2}\}$	12.	$24x + 9 = -16x^2$	$S = \{-\frac{3}{4}\}$
13.	$\frac{5x}{x^2+9} = -1$	$S = \{\}$	13.	$\frac{1}{7}x^2 + 1 = \frac{4}{7}x$	$S = \{\}$

b) Risolvi i seguenti problemi:

1. Sono dati due numeri positivi il secondo dei quali supera di una unità il doppio del primo. Trova i due numeri sapendo che la differenza tra il quadrato del secondo ed il quadrato del primo è 560.
2. In un trapezio rettangolo la base maggiore è gli 8/5 della minore e l'altezza supera quest'ultima di 2 cm. Sapendo che l'area misura 156 cm^2 trova la lunghezza delle basi.
3. Una macchina ed un autocarro partono contemporaneamente da una città per raggiungerne un'altra che dista dalla prima 1200 km. La velocità media della macchina supera quella dell'autocarro di 20 km/h ed il tempo impiegato dall'autocarro per percorrere la distanza è di 5 ore superiore a quello impiegato dalla macchina. Trovare le velocità dei due automezzi.
4. Per Pasqua ogni membro di una famiglia invia agli altri un biglietto augurale. Se il postino consegna 156 biglietti quanti sono in quella famiglia?

c) Ancora alcune equazioni di secondo grado.

1.	$x^2 + 6x - 2 = 0$	$S = \{-3 - \sqrt{11}; -3 + \sqrt{11}\}$
2.	$2x^2 - 3x - 4 = 0$	$S = \left\{\frac{3-\sqrt{41}}{4}; \frac{3+\sqrt{41}}{4}\right\}$
3.	$x^2 + 8x - 3 = 0$	$S = \{-4 - \sqrt{19}; -4 + \sqrt{19}\}$
4.	$2x^2 - 3x + 4 = 0$	$S = \{\}$
5.	$2x^2 - 4x - 3 = 0$	$S = \left\{\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right\}$
6.	$4x^2 - 4x + 1 = 0$	$S = \{\frac{1}{2}\}$
7.	$3x^2 - 4x - 13 = 0$	$S = \left\{\frac{2-\sqrt{43}}{3}; \frac{2+\sqrt{43}}{3}\right\}$
8.	$6x^2 - 11x - 10 = 0$	$S = \{-\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\}$
9.	$2x + \frac{3}{2} = x^2$	$S = \left\{\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right\}$
10.	$16x^2 + 23x + 4 = 0$	$S = \left\{\frac{-23-\sqrt{273}}{32}; \frac{-23+\sqrt{273}}{32}\right\}$
11.	$x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{10}{3}$	$S = \{-2; \frac{5}{3}\}$
12.	$(5x+1)^2 - 2(x+2)(x+3) = 6$	$S = \left\{-\sqrt{\frac{17}{23}}; \sqrt{\frac{17}{23}}\right\}$
13.	$x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$	$S = \{-1 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$
14.	$9x^2 - \frac{12}{5}x = -\frac{4}{25}$	$S = \{\frac{2}{15}\}$
15.	$4x - 1 = 5x^2$	$S = \{\}$
16.	$\frac{x^2-1}{x} - x + 8 = 3[1 - 2(x-1)] + 5x$	$S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$
17.	$\frac{3x-5}{x-2} + \frac{x-3}{1-x} = \frac{x^2+17}{x^2-3x+2}$	$S = \{-3; 6\}$

Serie aggiuntiva - equazioni di secondo grado

Risolvi le equazioni di secondo grado incomplete

$5x^2+125=0$	$S=\{\phi\}$	$x^2-2\sqrt{2}x=0$	$S=\{0;2\sqrt{2}\}$
$9a^2x^2-1=0$	$S=\{\pm\frac{1}{3a}\}$	$4ax^2-a^3=0\ (a\neq 0)$	$S=\{\pm\frac{a}{2}\}$
$2x^2+3-5=0$	$S=\{\pm 1\}$	$(a+b)x^2=0\ (a\neq -b)$	$S=\{0\}$
$4+3x^2=0$	$S=\{\phi\}$	$4b^2x^2+2abx=0$	$S=\{0;-\frac{a}{2b}\}$

$(x+7)^2+(x-7)^2=98$	$S=\{0\}$
$11x+(x-2)^2+(2x+1)(x-3)=(x+1)^2-14$	$S=\{\phi\}$
$ax^2+(a-1)(a+1)(x+2)=x(a^2-1)-2+2a^2\ \ (a\neq 0)$	$S=\{0\}$
$\frac{(x-7a)x}{6}-5a^2=\frac{ax}{6}-\frac{x(4a+x)}{3}$	$S=\{\pm a\sqrt{10}\}$

$(x-2)(x+3)+\frac{(x+1)^3-(x-2)^3}{4}=\frac{x^2-4}{2}-\frac{x+7-3x^2}{4}$	$S=\{0;\frac{1}{2}\}$

Risolvi le equazioni di secondo grado complete. Attenzione ai V.E!

$x^2-2x-3=0$	$S=\{-1;3\}$	$9x^2-12x+4=0$	$S=\{\frac{2}{3}\}$
$x^2+3x-10=0$	$S=\{-5;2\}$	$12x^2+x-6=0$	$S=\{-\frac{3}{4};\frac{2}{3}\}$
$2x^2-3x+20=0$	$S=\{\phi\}$	$6x^2+13x+8=0$	$S=\{\phi\}$

$\frac{x^2-x+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}$	$S=\{0\}$
$\frac{x}{k}-\frac{2}{x}=\frac{k(k-2)}{kx}$	per $k\neq 0$ $\ S=\{\pm k\}$
$-\frac{4x^2}{x+2}+\frac{2}{x-2}=\frac{5-4x^3}{x^2-4}$	$S=\{-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\}$

Problema 1. I soci di un'associazione sportiva decidono di versare quote uguali per costituire un fondo di 200 Fr. Così, quando due nuovi membri entrano a far parte della società, il contributo di ciascuno viene a ridursi di 5 Fr. Quanti sono attualmente i membri della associazione?[10]

Problema 2. Una televisione rpivata via cavo decide di iniziare l'attività in una piccola città degli Stati Uniti. La compagnia prevede che circa 600 persone noleggieranno il servizio, sempre che il costo del canone sia di 5 dollari al mese, mentre, per ogni aumento che si verifichi, del 5%, 4 degli originari 600 fruitori deciderebbero di non aderire. La compagnia inizia i programmi e incassa in totale, nel primo mese, 1500 dollari. Quante persono hanno pagato il canone?

Problema 3. Un giardiniere dispone 180 piante in filari, ciascuno dei quali contiene lo stesso numero di piante. Il giardiniere prevede che sarebbero stati necessari 6 filari in meno se ad ognuno fossero aggiunte 60 piante. Quanti sono i filari?[9]

Problema 4. In un laboratorio medico, la quantità di antigene, in milligrammi, presente durante una reazione antigene - anticorpo, è messa in relazione con il tempo t, in minuti, necessario perchè si abbia una quota fissa di precipitato, dall'equazione $3t=140-50x+5x^2$. Determinare x nel caso in cui t=20 min.

Problema 5. Per collocare un collettore solare in posizione corretta, la copertura di una casa viene progettata a dente di sega, ossia a forma di triangolo rettangolo. I cateti rappresentano i travetti della copertura e l'ipotenusa la trave centrale. Se il travetto che sta sullo stesso lato del collettore solare è 2 metri più corto dell'altro e la trave di base delle struttura è lunga 12 m, quanto misura ciascuno dei due travetti?[$1+\sqrt{71}$ e $\sqrt{71}-1$]

Problema 6. Matteo, che si sta allenando per partecipare alla Stramilano, ogni sabato pomeriggio corre 22 Km. Egli intende ridurre di $\frac{3}{4}$ d'ora il suo tempo e pensa di poterci riuscire aumentando la velocità media di 2 chilometri all'ora. Qual è la sua attuale velocità media sui 22 Km?

Problema 7. Trascurando la resistenza dell'aria, un proiettile sparato verso l'alto in linea retta con una velocità iniziale di v metri al secondo si troverà, t secondi più tardi all'altezza $h=v\cdot t-4,9t^2$. Se $v=30$ m/s, quanto impiegherà il proiettile per raggiungere l'altezza di 28m?[1,2s]

Problemi di secondo grado

1 Problemi risolvibili con eq. di secondo grado

Problema 1. Trovare due numeri intrei positivi sapendo che il loro rapporto è $\frac{2}{3}$ e che la somma dei loro quadrati e 208. $S = [8; 12]$

Problema 2. Trovare due numeri interi positivi consecutivi tali che la somma dei $\frac{2}{9}$ del quadrato del minore e di $\frac{1}{10}$ del quadrato del maggiore sia uguale a 28. $S = [9; 10]$

Problema 3. Trovare due numeri sapendo che la loro differenza è 3 e che sottraendo al quadrato del maggiore i $\frac{4}{5}$ del minore si ottiene 60. $S = [8\, e\, 5; -\frac{36}{5}\; e -\frac{51}{5}]$

Problema 4. Trovare due numeri pari consecutivi tali che la somma dei loro reciproci sia $\frac{7}{24}$. $S = [6; 8]$

Problema 5. Un corpo viene lanciato verso l'alto a una velocita 49 m/s. Dopo quanto tempo ricade a terra? $S = [10\, sec]$

Problema 6. In un rettangolo la base supera di $24cm$ i $\frac{4}{7}$ dell'altezza. Determinare il perimetro del rettangolo sapendo che l'area e di $448cm^2$.

Problema 7. Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo $3a$ e l'ipotenusa supera l'altro cateto di a. Trova l'area del triangolo. $S = [6a^2]$

Problema 8. La semidiagonale maggiore di un rombo supera di $1cm$ la semidiagonale minore. L'area del rombo è i $\frac{2}{3}$ d iquella del quadrato che ha per lato la diagonale minore del rombo. Determinare il perimetro del rombo. $S = [20\, cm]$

Problema 9. Se si aumento di $4cm$ la lunghezza dello spigolo di un cubo si verifica che il suo volume aumenta di $2368cm^3$. Determinare la lunghezza dello spigolo. $S = [12\, cm]$

1.1 Problemi risolvibili con i sistemi di secondo grado (o superiore)

Problema 10. Dividendo un numero $n \in \mathbb{N}$ per un altro $m \in \mathbb{N}$ si ottiene 3 come quoziente e 1 come resto; trovare m e n sapendo che la differenza dei loro quadrati è 231. $S = [n = 16; m = 5]$

Problema 11. Trovare due numeri sapendo che il loro prodotto è $\frac{8}{3}$ e che la somma dei loro reciproci è $\frac{31}{20}$. $S = [\frac{4}{5}; \frac{10}{3}]$

Problema 12. Trovare due numeri sapendo che il loro prodotto è i $\frac{24}{7}$ della loro somma e che la somma dei loro quadrati è 100. $S = [6; 8]$

Problema 13. Un urna contiene solo palline bianche e palline nere. La probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{4}{5}$, mentre la probabilità di estrarre una pallina nera è uguale all'inverso del numero delle palline nere stesse. Stabilire quante sono le palline nere e bianche. (Ricordare che la probabilità di estrarre una pallina bianca è uguale al rapporto tra il numero di palline bianche e il numero totale delle palline nell'urna) $S = [5\,\text{nere}; 20\,\text{bianche}]$

Problema 14. La piantina di un appartamento riproduce il muro principale con un segmento di una certa lunghezza. Inoltre riproduce un altro muro, lungo quanto la riproduzione del muro principale, in un segmento lungo $8cm$. Sapendo che la somma delle lunghezze dei due muri è $8,8m$, trovare le lunghezze reali deu due muri dell'appartamento. $S = [8m; 80cm]$

Problema 15. Una società finanziaria vende una certa quantità di euro, acquistando 11500 dollari a un dato cambio c (1 euro corrisponde a c dollari). Dopo un anno il cambio euro-dollaro scende di 0, 1, così la finanziaria, rivendendo la stessa quantità di dollari guadagna 800 euro. Qual era il cambio iniziale e la quantità di euro venduta? $S = [c = 1,25; 9200\,\text{euro}]$

Metodi di risoluzione di un sistema

Metodo di sostituzione

Risolviamo il sistema:

$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \; (I) \\ 3x - y = 7 \; (II) \end{cases}$

Risolvo la (II) rispetto alla y:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 7 \\ -y &= 7 - 3x \\ y &= 3x - 7 \end{aligned}$$

Sostituisco nell'equazione (I):

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ 2x - 3(3x - 7) &= 7 \\ 2x - 9x + 21 &= 7 \\ -7x &= -14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

sostituisco:

$$\begin{aligned} y &= 3x - 7 \\ y &= 3 \cdot 2 - 7 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Il sistema ha soluzione:

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Esercizio: risolvi con il metodo di sostituzione i sistemi

1.	$\begin{cases} 3x - 4y = 18 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$	R=$\{(2; -3)\}$	2.	$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 3y = 12 \end{cases}$	R=$\{(6; 2)\}$
3.	$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 14 \end{cases}$	R=$\{(4; 5)\}$	4.	$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$	R=$\{(2; -1)\}$
5.	$\begin{cases} y = 0,08x \\ y = 100 + 0,04x \end{cases}$	R=$\{(2500; 200)\}$	6.	$\begin{cases} y - 0,07x = 0 \\ y = 80 + 0,05x \end{cases}$	R=$\{(4000; 280)\}$

Metodo di addizione/sottrazione

Esempio 1: risolviamo il sistema

$\begin{cases} 2x - y = 1 \ (I) \\ 3x + y = 2 \ (II) \end{cases}$

Sommando la (I) con la (II) si eliminano le y e rimane un'equazione in x.

$\dfrac{\begin{cases} 2x - y = 1 \ (I) \\ 3x + y = 2 \ (II) + \end{cases}}{5x = 3}$ da cui $x = \frac{3}{5}$

La soluzione $x = \frac{3}{5}$ che ottengo mi permette di trovare la y, sostituendo $x = \frac{3}{5}$ nella prima o nella seconda equazione:

$$2 \cdot \frac{3}{5} - y = 1$$
$$y = \frac{1}{5}$$

Il sistema ha quindi soluzione:

$\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$

Esempio 2: risolviamo il sistema:

$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \ (I) \\ 2x + 5y = -1 \ (II) \end{cases}$

Moltiplico la (I) per 2 e la (II) per 3 e sottraggo tra loro le due equazioni:

$\dfrac{\begin{cases} 6x - 4y = 16 \ (I) \\ 6x + 15y = -3 \ (II) \end{cases} -}{-19y = 19}$ da cui $y = -1$

Si sostituisce il risultato trovato in una delle due equazioni a scelta (in questo caso la (I)):

$$\begin{aligned} 3x - 2 \cdot (-1) &= 8 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Il sistema ha quindi soluzione:

$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Esercizio: risolvi con il metodo appena visto i sistemi seguenti.

1.	$\begin{cases} 6x + 3y = 3 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$	R=$\{(-1; 3)\}$	2.	$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$	R=$\{(2; -1)\}$
3.	$\begin{cases} 2m - n = 10 \\ m - 2n = -4 \end{cases}$	R=$\{(6; 8)\}$	4.	$\begin{cases} 4x + 3y = 26 \\ 3x - 11y = -7 \end{cases}$	R=$\{(5; 2)\}$
5.	$\begin{cases} 9x - 3y = 24 \\ 11x + 2y = 1 \end{cases}$	R=$\{(1; -5)\}$	6.	$\begin{cases} 7x + 12y = -1 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$	R=$\{(1; -\frac{2}{3})\}$
7.	$\begin{cases} 3x + 8y = 4 \\ 15x + 10y = -10 \end{cases}$	R=$\{(-\frac{4}{3}; 1)\}$	8.	$\begin{cases} 4x - 3y = 15 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$	R=$\{(3; -1)\}$

Il metodo del confronto

Consideriamo il sistema:

$\begin{cases} x+y=7\,(I) \\ 2x+3y=18\,(\mathrm{II}) \end{cases}$

Risolviamo sia la (I) che la (II) rispetto a y. Otteniamo così il sistema:

$\begin{cases} y=7-x\ \ (I) \\ y=6-\frac{2}{3}x\,(\mathrm{II}) \end{cases}$

Uguagliandole otteniamo l'equazione in x:

$$\begin{aligned} 7-x &= 6-\frac{2}{3}x \\ \frac{21-3x}{3} &= \frac{18-2x}{3} \\ -x &= -3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Sostituendo $x=3$ in $y=7-x$ otteniamo $y=4$. Il sistema ha quindi soluzione:

$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

Risolvi con lo stesso metodo i sistemi:

1.	$\begin{cases} x-y=3 \\ x+2y=-3 \end{cases}$	R=$\{(1;-2)\}$	2.	$\begin{cases} y=\frac{5}{3}x-6 \\ y=\frac{1}{3}x+2 \end{cases}$	R=$\{(6;4)\}$
3.	$\begin{cases} 3x-y=1 \\ x+2y=5 \end{cases}$	R=$\{(1;2)\}$			

La risoluzione grafica

Riprendiamo il sistema risolto con il metodo del confronto:

$$\begin{cases} x+y=7\ (I) \\ 2x+3y=18\ (II) \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a y le due equazioni otteniamo:

$$\begin{cases} y=7-x \\ y=6-\frac{2}{3}x \end{cases}$$

Possiamo identificare ogni equazione con la forma algebrica di una funzione affine. Rappresentando nel piano cartesiano le due funzioni, la soluzione del sistema è data dalle coordinate del punto d'intersezione delle due funzioni.

Rappresenta nel piano cartesiano le due funzioni, poi leggi la soluzione dal grafico. Verifica poi le soluzioni trovate.

Alcune precisazioni teoriche

Un sistema di primo grado con due equazioni e due incognite viene rappresentato nella forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$$

Un sistema di questo tipo può avere:

- esattamente una soluzione e si dice **determinato**;
- nessuna soluzione e si dice **impossibile**;
- infinite soluzioni e si dice **indeterminato**.

Esercizio: stabilisci se i seguenti sistemi sono determinati, indeterminati o impossibili, risolvendoli dapprima graficamente e poi algebricamente.

1.	$\begin{cases} 2x-3y=2 \\ x+2y=8 \end{cases}$	R={( )}	2.	$\begin{cases} 4x+6y=12 \\ 2x+3y=-6 \end{cases}$	R={( )}
3.	$\begin{cases} 2x-3y=-6 \\ -x+\frac{3}{2}y=3 \end{cases}$	R={( )}			

Esercizi e problemi

Risolvi i seguenti sistemi

1.	$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -6x + 2y = 4 \end{cases}$	R=$\{()\}$	2.	$\begin{cases} 2x + 4y = 1 - \frac{1}{2}x \\ y = 1 + \frac{1}{2}x \end{cases}$	R=$\{(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3})\}$
3.	$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(2x - 1) \\ \frac{x - \frac{1}{2}}{2} + 2y - 1 = 3 \end{cases}$	R=$\{(-\frac{27}{26}; \frac{31}{13})\}$	4.	$\begin{cases} (x - 1)^2 - 3y = x^2 - 7 \\ \frac{3x - y}{2} + 3 = y + \frac{3}{2} \end{cases}$	R=$\{(1; 2)\}$

1 Sistemi di equazioni di grado superiore al primo

1.1 Prerequisiti

I prerequisiti per questa sezione sono la comprensione della risoluzione delle equazioni di secondo grado e della risoluzione dei sistemi di equazioni di primo grado.

1.2 I sistemi di grado superiore al primo

Un sistema di equazioni è l'insieme di più equazioni con le stesse incognite. Inoltre il grado di un sistema di equazioni è dato dal prodotto dei gradi delle singole equazioni che lo compongono! Quinid se un sistema è composto da due equazioni di primo grado, il sistema sarà anch'esso di primo grado; se un sistema è composto da una equazione di secondo grado e una di primo grado, il sistema sarà di secondo grado; se un sistema è composto da due equazioni di secondo grado si avrà un sistema di quarto grado, ecc.

Risolvere i sistemi, come già visto consiste nel trovare tutte le soluzioni comuni alle equazioni del sistema. Ciò significa che per le equazioni di grado superiore al primo ci può essere un numero variabile di soluzioni (ogni soluzione è un "set" di risultati per tutte le incognite) che va da 0 (sistema impossibile) fino al grado del sistema. Per risolvere un sistema di grado superiore al primo **solitamente si usa la tecnica della sostituzione**.

1.3 Tre esempi

1.3.1 Primo esempio

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + 2x - y = 14 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Questo è evidentemente un sistema di .... grado.

Che cosa si può dedurre a proposito delle soluzioni?

Per risolverlo conviene isolare una delle incognite nella seconda e sostituire il risultato nella prima equazione.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + 2x - y = 14 \\ y = 4 - 2x \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3(4-2x)^2 + 2x - (4-2x) = 14 \\ 2x^2 - 3(16 - 16x + 4x^2) + 2x - 4 + 2x = 14 \\ 2x^2 - 48 + 48x - 12x^2 + 2x - 4 + 2x = 14 \\ -10x^2 + 52x - 66 = 0 \\ 5x^2 - 26x + 33 = 0 \end{aligned}$$

Usando la formula risolutiva si ottengono due soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169-165}}{5} \qquad \text{e quindi} \qquad x_1 = 3 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{11}{5}$$

Naturalmente si devono trovare anche le soluzioni per y sostituendo i valori di x nell'equazione (più comoda!).

$$y_1 = 4 - 2 \cdot 3 = -2 \qquad \text{e} \qquad y_2 = 4 - 2 \cdot \frac{11}{5} = -\frac{2}{5}$$

E come risultato si potrà scrivere: $S = \{(3; -2), (\frac{11}{5}; -\frac{2}{5})\}$

1.3.2 Secondo esempio

$$\begin{cases} xy - x + y = 2 \\ 4y + x = 7 \end{cases}$$

Siccome il discriminante nell'equazione ottenuta è $\Delta = 0$ si ha unicamente una soluzione: $S = \{(1; \frac{3}{2})\}$.

1.3.3 Terzo esempio

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Siccome il discriminante in questo caso è $\Delta < 0$ il sistema non ha soluzioni.

1.4 Esercizi (quelli in grigio per chi si sente "in gamba")

$\begin{cases} x(x+2y)=0 \\ 4x-y=18 \end{cases}$	$S=\begin{cases} x=0 \\ y=-18 \end{cases} e \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2-xy=y^2+11 \\ 2x+4+y=0 \end{cases}$	$S=\begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases} e \begin{cases} x=-9 \\ y=14 \end{cases}$
$\begin{cases} 3x=y+2 \\ x^2-xy+y^2=36+xy \end{cases}$	$S=\begin{cases} x=-2 \\ y=-8 \end{cases} e \begin{cases} x=4 \\ x=10 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y=1 \\ (x+y)^2+y(1-2x)=18-x \end{cases}$	$S=\{(3;2),(-3;-4)\}$
$\begin{cases} x\sqrt{3}-y+13=0 \\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=845 \end{cases}$	$S=\begin{cases} x=13\sqrt{3} \\ y=52 \end{cases} e \begin{cases} x=-19\sqrt{3} \\ y=-44 \end{cases}$	$\begin{cases} (x-3)^2=3x(y-2) \\ x(2y-3)=3 \end{cases}$	$S=\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} e \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{5}{3} \end{cases}$
$\begin{cases} x+y=8 \\ x^2-(y^2+16)=16 \end{cases}$	$S=\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x=\frac{1}{2}(1-y) \\ (4x+y)^2+4x+y+1=0 \end{cases}$	$S=\varnothing$
$\begin{cases} 2x+y+7=0 \\ 4x^2=(y+7)^2 \end{cases}$	$S=\text{indet.}$	$\begin{cases} x+2b=2y \\ x^2-xy+y^2=3a^2+b^2 \end{cases}$	$S=\begin{cases} x=2a \\ y=b+a \end{cases} e \begin{cases} x=-2a \\ y=b-a \end{cases}$
$\begin{cases} 2+\frac{3}{4}x=\frac{4y+9}{4} \\ \frac{x-3}{x-2}=1-\frac{2y-3}{y-1} \end{cases}$	$S=\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} e \begin{cases} x=\frac{11}{6} \\ y=\frac{9}{8} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{x-a}+\frac{1}{y-b}=\frac{1}{2b} \\ 2x+y=2a+b \end{cases}$	$S=\begin{cases} x=a+b \\ y=-b \end{cases}$
$\begin{cases} 2x=20+y \\ x+z=10 \\ 2x^2-z^2=50-\frac{y^2}{4} \end{cases}$	$S=\begin{cases} x=5 \\ y=-10 \\ z=5 \end{cases} e \begin{cases} x=-5 \\ y=-30 \\ z=15 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2(y+z)-1=3y \\ x+y-z=2y-x \\ (x-y)(x+y)+4+z^2=0 \end{cases}$	$S=\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases} e \begin{cases} x=-\frac{6}{5} \\ y=-\frac{7}{3} \\ z=-\frac{1}{15} \end{cases}$

Disequazioni

Introduzione: alcuni esempi

$\frac{3}{2}x - \frac{7}{4} < \left(\frac{x}{2} + 1\right) \cdot \frac{2}{3}$

$x^2 + 2x - 5 \geqslant 4x^2 - 8x$

$\begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ \frac{5}{4}x - 2 > x + 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + 2y \leq 3 \\ 5x - 2y \leq 10 \end{cases}$

$\frac{2x-1}{x+\frac{1}{4}} < \frac{1}{x}$

Gli intervalli

Disuguaglianza	Intervallo	Rappresentazione grafica
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b[$	
$a < x \leqslant b$	$]a; b]$	
$a < x < b$	$]a; b[$	
$x < b$	$]-\infty; b[$	
$x > b$	$]b; +\infty[$	
$x \leqslant b$	$]-\infty; b]$	
$x \geqslant b$	$[b; +\infty[$	

Esercizio: scrivi ognuno dei seguenti intervalli con la disuguaglianza e rappresentalo sulla retta reale.

Intervallo	Disuguaglianza	Rappresentazione grafica
$[-2;4]$		
$[-4;16[$		
$]-5;10]$		
$]-1;3[$		
$[-1;1[$		
$]0;+1[$		
$]-1;-4]$		
$]-1;2[$		

Esercizio: scrivi i seguenti insiemi sotto forma di intervalli e rappresentali sulla retta dei numeri reali.

$A=\{x\epsilon\mathbb{R}\,|-3\leqslant x\leqslant 3\}$
$B=\{x\epsilon\mathbb{R}\,|-1\leqslant x<3\}$
$C=\{x\epsilon\mathbb{R}\,|x\leqslant 2\}$
$D=\left\{x\epsilon\mathbb{R}\,|x>\frac{1}{2}\right\}$

Unione ed intersezione

Poiché gli intervalli sono insiemi di numeri reali, le operazioni insiemistiche di unione e di intersezione sono spesso utili quando si lavora con gli intervalli. Riprendiamo le definizioni di unione e intersezione di insiemi.

Unione:	$A \cup B = \{x \mid x \epsilon A \ o \ x \epsilon B\}$
Intersezione:	$A \cap B = \{x \mid x \epsilon A \ e \ x \epsilon B\}$

Esercizio: dati gli insiemi $A = [-2; 3]$, $B =]1; 6[$ e $C =]4; +1[$, rappresenta sulla retta dei numeri e scrivi, se possibile, come singoli intervalli i seguenti abbinamenti:

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cap C$, $B \cup C$.

Proprietà delle disuguaglianze

Siano a, b, c dei numeri reali. Valgono le seguenti proprietà:

1	se $a < b$ allora $b > a$	
2	se $a < b$ e $b < c$ allora $a < c$	transitiva
3	se $a < b$ allora $a + c < b + c$	proprietà dell'addizione
4	se $a < b$ e $c > 0$ allora $a \times c < b \times c$	proprietà della moltiplicazione
	se $a < b$ e $c < 0$ allora $a \times c > b \times c$	

La quarta proprietà dice in particolare che se moltiplichiamo (dividiamo) per un numero negativo si deve cambiare il segno della disuguaglianza!!!

Disequazioni di primo grado ad un'incognita

Esempi:

$S = \{x \epsilon \mathbb{R} \mid 2x + 3 > 3\} =]0; +\infty[$
$S = \{x \epsilon \mathbb{R} \mid -x + 8 \geqslant 0\} = ...$
$S = \{x \epsilon \mathbb{R} \mid 5x - 10 > 0\} = ...$
$S = \{x \epsilon \mathbb{R} \mid x^2 < 0\} = ...$

Esempi:

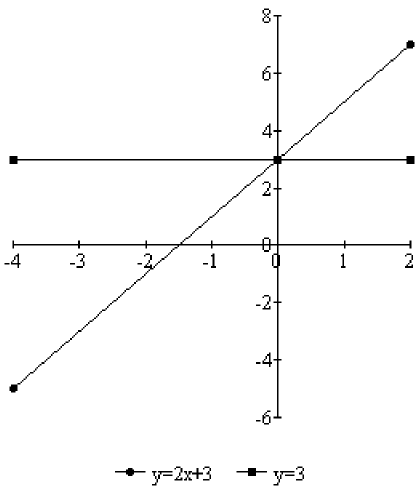
$$\begin{aligned} 2x+3 &> 3 & /-3 \\ 2x+3-3 &> 3-3 & \\ 2x &> 0 & /\times\tfrac{1}{2} \\ x &> 0 & \end{aligned}$$

$$-x+8 \leqslant 0$$

$$5x-10 > 0$$

$$5x-10 > 0$$

Esempio: risolviamo graficamente la disequazione $2x+3>3$



x	$2x+3$	3
-4	-5	3
0	3	3
2	7	3

Esercizi

Esercizio 1: risolvi le seguenti disequazioni, indicando l'insieme delle soluzioni come intervallo:

$2(2x+3)-10>6(x-2)$	$S=]-\infty;4[$
$\frac{2x-3}{4}+6\geq 2+\frac{4x}{3}$	$S=]-\infty;\frac{39}{10}]$
$-2-\frac{b}{4}\leq\frac{1+b}{3}$	$S=[-4;+\infty[$
$\frac{y-3}{4}-1>\frac{y}{2}$	$S=]-\infty;-7[$
$\frac{5}{3}x-\frac{x-1}{2}\geq x+\frac{1}{4}$	$S=[-\frac{3}{2};+\infty[$
$\frac{2x}{3}>\frac{23}{24}-\frac{5x}{4}$	$S=]\frac{1}{2};+\infty[$
$\frac{x+5}{6}-\frac{10-x}{-3}<\pi$	$S=]25-6\pi;+\infty[$
$\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}(5-x)\geq 0$	$S=[\frac{45}{19};+\infty[$
$(x-1)(x+1)(x+2)+x^2<(x+1)^3+5$	$S=]-2;+\infty[$
$(2x-3)(3x+1)-2(x-3)(3x+2)-7x<0$	$S=\{\}$
$5x(4x-5)-(5x-3)^2<5x(1-x)$	$S=\ R$
$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(2x-1)^2}{16}\leq\frac{35}{16}$	$S=[0;+\infty[$

Esercizio 2: risolvi graficamente le seguenti disequazioni:

$6x+6>4x+10$
$3x-2<5x+4$
$2x+4\leqslant 5x+4$

Le disequazioni fratte

In una disequazione fratta non si può procedere com per le equazioni fratte. In particolare è proibito moltiplicare tutta l'equazione per il denominatore comune, proprio perché non se ne conosce il segno globale. La tecnica di risoluzione è quindi piuttosto diversa. Si deve operare in modo da ottenere un sistema del tipo:

$\frac{N(x)}{D(x)}<0$ oppure $\frac{N(x)}{D(x)}>0$ oppure ancora i polinomi analoghi con i segni $\leqslant$ e $\geqslant$.

In seguito si procede all'analisi del segno, come esemplificato sotto.

Vediamo il procedimento con un esempio.

$\frac{2x+3}{4x+4}-1$	$\leqslant$	$\frac{x-1}{x+1}$	Prima di tutto occorre spostare tutto a sinistra
$\frac{2x+3}{4x+4}-1-\frac{x-1}{x+1}$	$\leqslant$	0	Si trova il denominatore comune e si eseguono le operazioni.
$\frac{2x+3-1\cdot(4x+4)-4(x-1)}{4(x+1)}$	$\leqslant$	0	Si semplifica.
$\frac{-6x+3}{4(x+1)}$			

In questo caso si trova che:

$-6x+3=0$ e quindi $x=\frac{1}{2}$ per il numeratore;

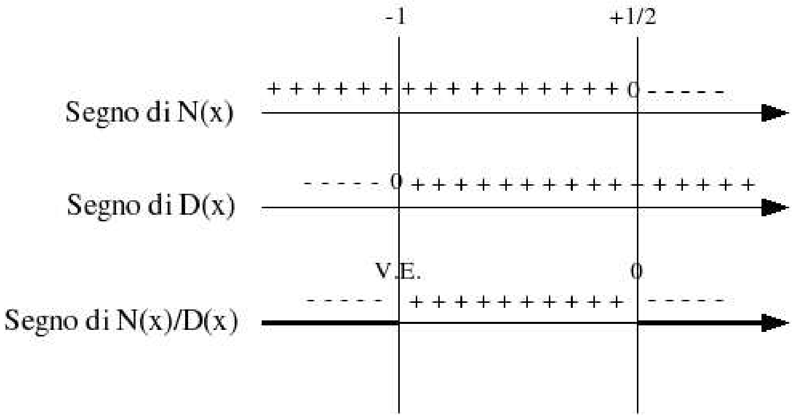
$4(x+1)=0$ e quindi $x=-1$ per il denominatore.

Si riportano i due risultati in un grafico come quello sottostante e si analizzano i segni al di qua e al di là degli zeri, sostituendo con dei valori test.

Nel nostro caso per il numeratore se si inserisce $x=0$ si osserva che il risultato è $-6\cdot 0+3=3$ è positivo, mentre per $x=1$ si ha $-6\cdot+1+3=-3$ un risultato negativo.

Per il denominatore invece si ha per esempio inserendo $x=-2$ il risultato $4(-2+1)=-4$ negativo e per $x=0$ il risultato $4(0+1)=4$ positivo.

Osservate quindi il grafico sottostante:



Applicando le regole dei segni alla divisione $\frac{N}{D}$ si può dedurre, a partire dai segni ottenuti prima anche il segno globale e in tal modo trovare la soluzione alla disequazione fratta; inoltre bisogna stare attenti agli zeri del denominatore che diventano dei valori eccezionali da scartare! In questo esempio si ha la soluzione:

$S=]-\infty;-1[\cup[\frac{1}{2};+\infty[$

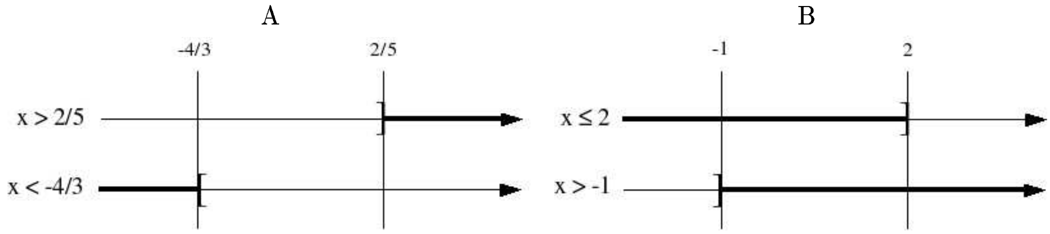
Il fatto che il -1 non sia compreso dipende proprio dal fatto che -1 è un valore eccezionale!

Esercizi: Risolvete le seguenti disequazioni fratte:

$\frac{x+1}{x}\geqslant 0$	$S=]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$
$\frac{3}{2x}\leqslant\frac{1-2x}{6x}$	$S=$
$\frac{1-x}{2x}\geqslant 0$	$S=]0;1]$
$\frac{7}{6}>\frac{4x+2}{x-7}$	$S=$
$\frac{3x-6}{2x+1}\geqslant 0$	$S=]-\infty;-\frac{1}{2}[\cup[2;+\infty[$
$\frac{5x}{11}-\frac{3}{22}>\frac{15x^2-18}{33x}$	$S=$
$\frac{1}{x}\leq 1$	$S=]-\infty;0[\cup[1;+\infty[$
$\frac{1}{5}x-\frac{1}{x-5}>\frac{x+1}{5}-\frac{x-1}{x-5}$	$S=$
$\frac{x-3}{3x}+\frac{x}{6}\leqslant\frac{x^2+9}{6x}-\frac{x+3}{x}$	$S=$
$\frac{x-1}{2x}\cdot\frac{1}{2x-2}\leqslant 2$	$S=]-\infty;0[\cup[\frac{1}{8};1[\cup]1;+\infty[$

Sistema A	Sistema B
$\begin{cases} 3(1-x) < 2x+1 \\ 2x-6 > 5x-2 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{4}{3} + 5x \leqslant \frac{1}{2}x + 11 - \frac{1}{3} \\ \frac{6}{5}x + 1 - x < 2 + \frac{1}{2}x + \frac{7}{10}x \end{cases}$
$\begin{cases} 3-3x < 2x+1 \\ 2x-5x > -2+6 \end{cases}$	$\begin{cases} 9x - 8 + 30x \leqslant 3x + 66 - 2 \\ 12x + 10 - 10x < 20 + 5x + 7x \end{cases}$
$\begin{cases} -3x-2x < 1-3 \\ -3x > 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 39x - 3x \leqslant 64 + 8 \\ 2x - 12x < 20 - 10 \end{cases}$
$\begin{cases} -5x < -2 \\ -3x > 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 36x \leqslant 72 \\ -10x < 10 \end{cases}$
$\begin{cases} 5x > 2 \\ 3x < -4 \end{cases}$	$\begin{cases} x \leqslant \frac{72}{36} \\ 10x > -10 \end{cases}$
$\begin{cases} x > \frac{2}{5} \\ x < -\frac{4}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} x \leqslant 2 \\ x > -1 \end{cases}$

Ora si passa alla rappresentazione grafica delle due soluzioni e si cercano gli insiemi di soluzioni che soddisfano entrambe le disequazioni. Osserva i grafici e le soluzioni!



$S = \phi$ $\qquad$ $S =]-1; 2]$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni:

$\begin{cases} x + 7 - 3x \geqslant -x(x+1) + x^2 - 3 - 2x \\ 2x + 3 < 3 \end{cases}$	$S = [-10; 2[$
$\begin{cases} x - 6 - x(x-1) > 2 - x^2 \\ 2x - 1 < 3 \end{cases}$	$S =$
$\begin{cases} \frac{1}{3}(9x+12) - 10 > 12 \\ 4x(x-1) + 10 < 4x(x+1) - 6 \end{cases}$	$S =]6; +\infty[$
$\begin{cases} 7x - 1 + x(x-3) + 6 \leqslant x^2 - 7x + 1 \\ 4x - 7 < 8x + 2 \end{cases}$	$S =$
$\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x + x - 3 > -(5+x) \end{cases}$	$S =]-\frac{4}{5}; \frac{2}{3}[$

Disequazioni semplici

72 $(x-1)(x+1)-(x-3)^2<3$ $\left[x<\frac{13}{6}\right]$

73 $(x-1)^2-3x<(x-3)(x+3)$ $[x>2]$

74 $4(5x-1)+2(3x+1)^2>3x(6x+5)-2x-3$ $\left[x>-\frac{1}{19}\right]$

75 $(2x-1)^2-3(2+x)\leq(2x+3)(2x-3)+2(x+3)$ $\left[x\geq-\frac{2}{9}\right]$

76 $4(2x-1)-x+(2x-1)^2>4(x-2)^2-12(x-1)$ $[x>1]$

77 $(3x-1)(3x+1)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{1}{4}(x+1)^2-9x^2<0$ $\left[x<\frac{7}{6}\right]$

Disequazioni fratte

112 $\frac{10}{7x}>\frac{5}{14}$ $[0<x<4]$

113 $\frac{2}{x}<\frac{4}{3x}$ $[x<0]$

114 $\frac{6x}{x-1}<1$ $\left[-\frac{1}{5}<x<1\right]$

115 $\frac{x+1}{x-1}>\frac{3}{4}$ $[x<-7 \vee x>1]$

121 $1-\frac{3}{x+2}<\frac{3x}{6+3x}$ $[x>-2]$

122 $\frac{x-3}{2x-1}+1\leq\frac{3}{2}$ $\left[x>\frac{1}{2}\right]$

123 $\frac{x-1}{2x}\cdot\frac{1}{2x-2}\leq 2$ $\left[x<0 \vee x\geq\frac{1}{8} \wedge x\neq 1\right]$

124 $\frac{6+(3-x)^2}{x+2}-1\geq\frac{2-x^2}{-x-2}$ $\left[-2<x<\frac{15}{7}\right]$

Sistemi di disequazioni

168 $\begin{cases}6x-1+2x(x-2)-x^2\geq x^2+1\\2x-6>x+1\end{cases}$ $[x>7]$

169 $\begin{cases}\frac{1}{2}(2+x)-1>-\frac{1}{3}(x-1)\\\frac{1}{5}(x+10)<\frac{1}{3}(x+6)\end{cases}$ $\left[x>\frac{2}{5}\right]$

170 $\begin{cases}2x(x-1)-x^2+x-3\leq x(x-2)+7\\2x+3-x+x^2>x(x+2)-3\end{cases}$ $[x<6]$

Disequazioni di 2° grado

205 $\dfrac{x^2+4x-5}{2x-3}<0$ $\left[x<-5 \vee 1<x<\dfrac{3}{2}\right]$

206 $\dfrac{x^2-2x+1}{6x}>0$ $[x>0,\ x\neq 1]$

207 $\dfrac{2x-8}{(2x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}\geq 0$ $\left[-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2} \vee x\geq 4\right]$

228 $3-x\geq\dfrac{4}{x+2}$ $[x<-2 \vee -1\leq x\leq 2]$

229 $x\leq\dfrac{6}{x-1}$ $[x\leq -2 \vee 1<x\leq 3]$

230 $4-x>\dfrac{10}{x+3}$ $[x<-3 \vee -1<x<2]$