

Funzione esponenziale e logaritmica

La funzione esponenziale

Le funzioni esponenziale e logaritmica permettono di descrivere e risolvere una gran quantità di problemi quali la crescita di una popolazione, di animali o di batteri, decadimento radioattivo, la crescita di un capitale ad interesse composto, l'intensità di un terremoto.

Consideriamo due esempi di funzioni: $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$

Le due funzioni sono diverse: nella f l'argomento è all'esponente, mentre nella g l'argomento è alla base. La funzione g è la funzione quadratica che hai già studiato, mentre la funzione f rappresenta un nuovo tipo di funzioni, la funzione esponenziale.

Un esempio di funzione esponenziale importante riguarda la crescita del numero di batteri presenti in una certa coltura.

Esempio

Un biologo ha scoperto che il numero di batteri N presenti in una coltura raddoppia ogni 20 minuti e dopo t ore soddisfa l'equazione: $N = 50 \cdot 2^{3t}$

Quanti batteri sono presenti all'inizio del processo?

Quanti batteri sono presenti dopo 7 ore?

Quanti batteri sono presenti dopo 3 ore e 25 minuti?

Rappresenta la funzione

Stima utilizzando il grafico dopo quanto tempo saranno presenti 5500 batteri. Cerca poi di calcolare un valore più preciso.

Con lo studio della funzione esponenziale potremo dapprima risolvere l'equazione graficamente e poi anche algebricamente.

Definizione:

La funzione esponenziale è la funzione $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = a^x$ con a numero reale, $a > 0$, $a \neq 1$

Nota che la base della funzione esponenziale è positiva, altrimenti avremmo ad esempio il caso $(-2)^{\frac{1}{2}}$, e che la base è diversa da 0 e da 1.

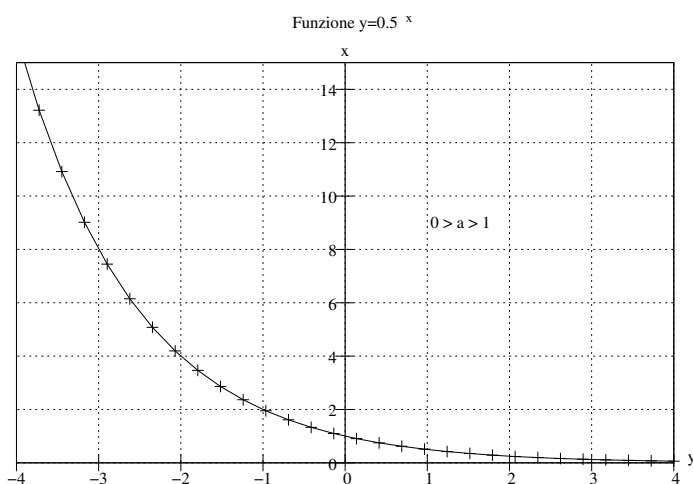
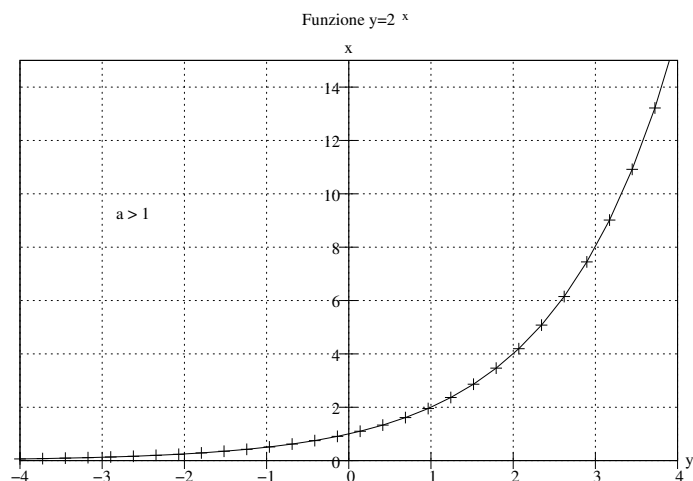
Esercizio: rappresenta graficamente, su un foglio quadrettato o sul foglio elettronico, le funzioni f e g nel piano cartesiano.

(Rifletti prima di iniziare: in quale parte del piano cartesiano si troverà il grafico? Quali valori di x scegli per rappresentare la funzione?)

$$f: y = 2^x \quad g: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

La differenza nei due casi è data dalla base: nel primo caso è maggiore di 1, nel secondo è compresa tra 0 e 1. Cosa puoi osservare sui grafici delle due funzioni? E sulle differenze tra i due grafici?

In generale il grafico della funzione esponenziale $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = a^x$ è uno dei seguenti casi:



Osservazioni

Il grafico della funzione passa sempre per $(0; 1)$. Perché?

L'insieme di definizione è \mathbb{R} ; quello delle immagini $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

Se la base è compresa tra 0 e 1, all'aumentare di x il valore della funzione diminuisce; se il valore della base è maggiore di 1 aumenta.

Esercizi

1. Rappresenta graficamente le seguenti funzioni (se possibile, usa il foglio elettronico):

- i) $x \mapsto y = 3^x$
- ii) $x \mapsto y = 3^x + 1$
- iii) $x \mapsto y = 3^{x+1}$
- iv) $x \mapsto y = 2 \cdot 3^x$
- v) $x \mapsto y = 3^{\frac{x}{2}}$
- vi) $x \mapsto y = 3^{-x}$
- vii) $x \mapsto y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
- viii) $x \mapsto y = 2^{-2x}$

2. Considera la funzione $\exp_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = 3^x$

- i) leggi sul grafico e calcola l'immagine tramite \exp_3 di $x = \frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{2}$;
- ii) leggi sul grafico l'argomento corrispondente a $y = 1, y = 10, y = \frac{1}{2}$.

ALCUNI ESEMPI

La crescita di popolazioni (di persone, animali, insetti o batteri).

Un modo ragionevole per misurare il tasso di crescita di una popolazione è quello di considerare il tempo che la popolazione impiega per raddoppiare. Questo modello è spesso usato su tempi brevi e viene descritto con la formula $P = P_0 \cdot 2^{\frac{t}{d}}$ dove P è la popolazione al tempo t , P_0 è la popolazione iniziale (al tempo $t=0$) e d è il tempo di raddoppio.

A) Il messico ha un apopolazione attorno ai 100 milioni di persone ed è stato stimato che la sua popolazione raddoppia in 21 anni. Se la popolazione cresce con lo stesso tasso, quale sarà la popolazione tra 15 anni? E tra 30 anni?

b) Il batterio Escherichia Coli (E. Coli) si trova nell'intestino di parecchi mammiferi. In un particolare esperimento di laboratorio si è determinato che il tempo di raddoppio per il batterio è di 25 minuti. Se l'esperimento inizia con una popolazione di 1000 batteri e il tempo di raddoppio non cambia, quanti batteri ci sono dopo 10 minuti? E dopo 5 ore?

c) Interesse composto

Se si depositano 1000 CHF al tasso d'interesse composto semestrale del 2%, quale montante si avrà a disposizione dopo 5 anni?

Equazioni esponenziali

Definizione:

si chiama equazione esponenziale l'uguaglianza di due funzioni delle quali almeno una sia esponenziale (l'incognita compare nell'esponente di qualche potenza)

A) Se i due membri dell'equazione sono, o si possono mettere, sotto la forma di due potenze di base diversa, per risolvere l'equazione sarà necessaria l'applicazione dei logaritmi (vedi punto 7).

B) Se i due membri dell'equazione sono, o si possono mettere, sotto la forma di due potenze aventi la stessa base, la risoluzione dell'equazione risulta semplice; dall'uguaglianza tra le potenze si può infatti passare all'uguaglianza tra gli esponenti, ottenendo un'equazione equivalente alla data

Esempi: $3^x = 81$ $7^{5x-8} = 49^{x+2}$ $2^x - 1 = x$

Risolvi tali equazioni con i semplici strumenti che conosci: i grafici di funzione e le proprietà delle potenze. Il seguente teorema ti permetterà di procedere correttamente

Teorema 1.

se $x_1 \neq x_2$ allora $a^{x_1} \neq a^{x_2}$

se $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ allora $x_1 \neq x_2$ ($a > 0, a \neq 1$)

Dunque $a^{f(x)} = a^{h(x)} \Rightarrow f(x) = h(x)$

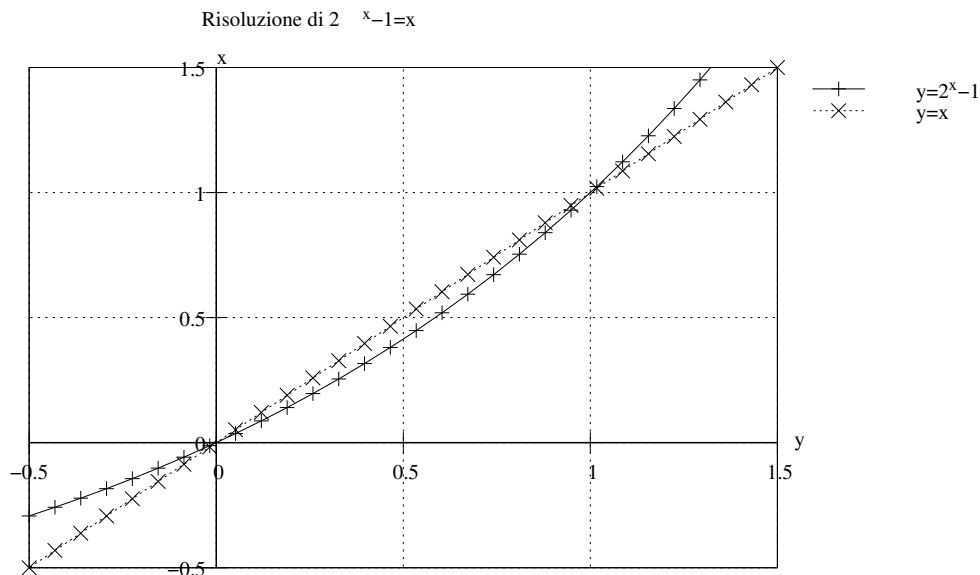
Esempio1: per le proprietà delle potenze e per il teorema sopra

$$3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$$

Esempio 2: per le proprietà delle potenze e per il teorema sopra

$$7^{5x-8} = 49^{x+2} \Leftrightarrow 7^{5x-8} = (7^2)^{x+2} \Leftrightarrow 7^{5x-8} = 7^{2x+4} \Leftrightarrow 5x-8 = 2x+4 \Leftrightarrow x =$$

Esempio 3: risoluzione grafica di $2^x - 1 = x$



Dunque le soluzioni sono: $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$

Esercizi: risolvi algebricamente le seguenti equazioni

a) $4^x = 8$	b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$	c) $\sqrt[5]{9^x} = \frac{1}{27}$
d) $6^{7-x} = 6^{2x+1}$	e) $1 = 32^{2x}$	f) $2^x - \frac{1}{128} = 0$
g) $16^x - 8 = 0$	h) $\left(\frac{1}{5}\right)^{6-x} = 5$	i) $\frac{1}{2^{\frac{x}{3}}} = 32$
l) $3^x = \frac{1}{3}$	m) $7^{x+3} = 343$	n) $27^{x-1} = 9^{2x-3}$
o) $36^x \cdot 6 = \frac{1}{216}$	p) $81 - 3^{-x} = 0$	q) $9^x \cdot 27^{x+1} \cdot 3^x = 81$
r) $7^{2x^2} \cdot \frac{1}{7^{x+7}} = 343$	s) $3^{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 27^{x+2} = 243$	t) $\frac{4^{x^2}}{2^{7x+10}} \cdot 16 = 8$

Soluzioni:

a) $3/2$; b) -4 ; c) $-15/2$; d) 2 ; e) 0 ; f) -7 ; g) $\frac{3}{4}$; h) 7 ; i) -15 ;

l) -1 ; m) 0 ; n) 3 ; o) -2 ; p) -4 ; q) $1/6$; r) $5/2, -2$; s) $-3/8$; t) $9/2, -1$.

I logaritmi

Consideriamo la funzione $\exp_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = 2^x$

$$\begin{array}{lll} \log_2(32) = & \Leftrightarrow & 2^5 = 32 & \log_2(16) = \\ \log_2(8) = & \Leftrightarrow & & \log_2(4) = \\ \log_2(2) = & \Leftrightarrow & & \log_2(1) = \end{array}$$

Esempi:

$$\log_3(27) =$$

$$\log_7(49) =$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(8) =$$

$$\log_5(125) =$$

$$\log_{12}(144) =$$

$$\log_{\frac{125}{27}}\frac{3}{5} =$$

In generale:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Esercizi

Calcola i seguenti logaritmi:

$$a) \log_3 243 = \quad d) \log_{10} 10^7 000 = \quad g) \log_3 9^{-0,5} =$$

$$b) \log_{\frac{1}{2}} 8 = \quad e) \log_2 \frac{1}{8} = \quad h) \log_2 4^3 =$$

$$c) \log_{10} \sqrt{10} = \quad f) \log_{12} 144 = \quad i) \log_5 125 \sqrt{5} =$$

Determina la base x sapendo che:

$$a) \log_x 25 = 2 \quad c) \log_x \frac{9}{4} = 2 \quad e) \log_x \frac{1}{1000} = -3$$

$$b) \log_x 243 = 5 \quad d) \log_x \frac{1}{16} = -2$$

Determina x sapendo che:

$$a) \log_6 x = 2 \quad c) \log x = -\frac{3}{2} \quad e) \log_7(2x - 7) = 0$$

$$b) \log_3 x = 2 \quad d) \log_2 x = 0 \quad f) \log_3 x = -7$$

Soluzioni:

1. a) 5; b) -3; c) ; d) 4; e) -3; f) 2; g) -1; h) 6; i) 7/2;

2. a) 5; b) 3; c) 3/2; d) 4; e) 10;

3. a) 36; b) 9; c) $\sqrt{\frac{1}{1000}}$ [F040?]0,0316; d) 1; e) 4; f) $\frac{1}{2187}$ [F040?]0,000457.

La funzione logaritmica

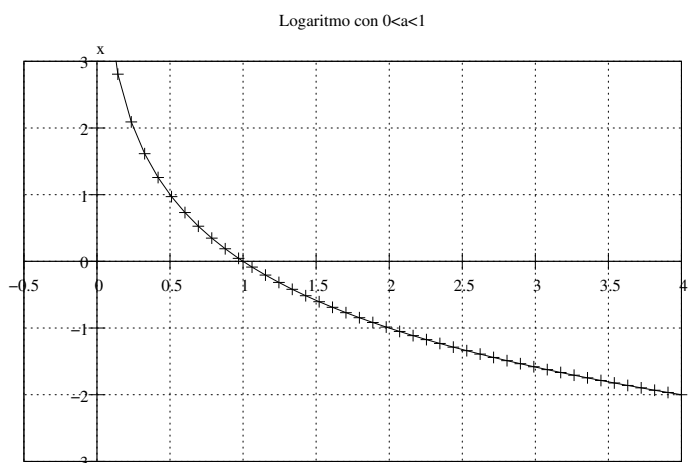
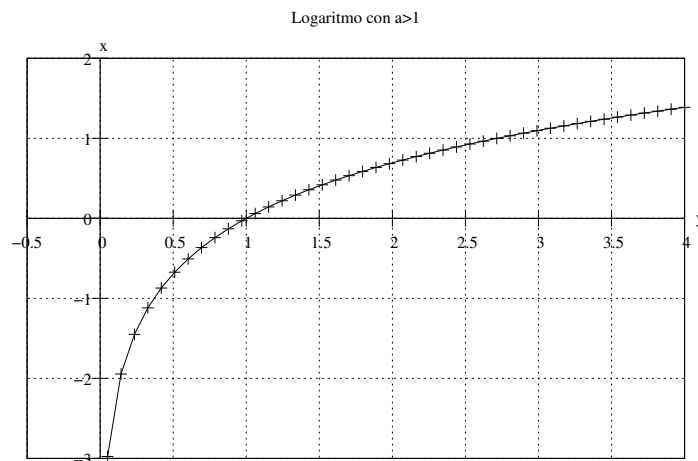
Definizione

La funzione logaritmo è la funzione inversa della funzione esponenziale:

$$\log_a: R^+ \setminus \{0\} \rightarrow R \quad \text{se e solo se} \quad x = a^y \text{ e } a \text{ è un numero reale positivo diverso da } 1.$$
$$x \mapsto y = \log_a(x)$$

Esercizio: rappresenta graficamente le funzioni $f(x) = \log_2(x)$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

Anche per la funzione logaritmo possiamo distinguere due casi, in base al valore di a :



Osservazioni

$$D_{\log} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \quad Im_{\log} = \mathbb{R}$$

Non esiste il logaritmo di un numero negativo, né quello di zero.

La base della funzione logaritmica è sempre strettamente positiva e diversa da 1.

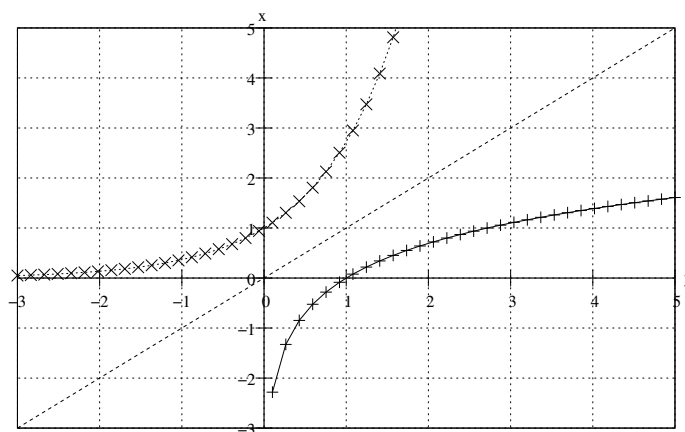
Se $0 < a < 1$ exp_a e log_a sono monotone decrescenti; se $a > 1$ sono monotone crescenti.

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

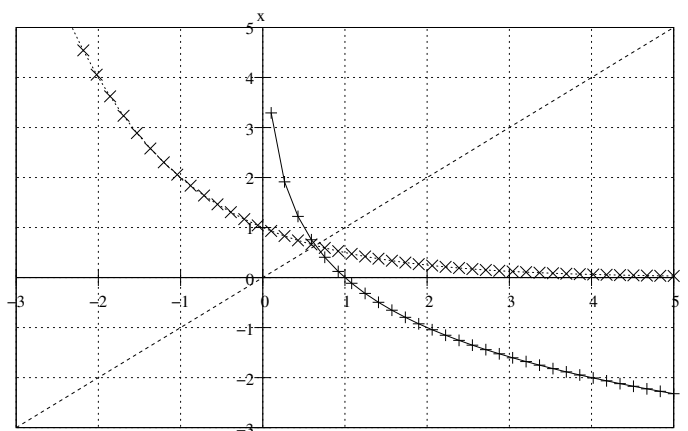
Osservazione

Il grafico della funzione logaritmo è simmetrico rispetto all'asse di equazione $y = x$, al grafico della corrispondente funzione esponenziale. Di conseguenza, siccome la funzione esponenziale descrive una crescita o un decadimento molto marcato, quella logaritmica rappresenta una crescita o un decadimento smorzato.

Logaritmo ed esponenziale con $a > 1$



Logaritmo ed esponenziale con $0 < a < 1$



Esercizio: rappresenta le funzioni seguenti.

$$y = \log_3(x); \quad y = \log_3(-x); \quad y = \log_3(x-2); \quad y = \log_3(x) - 2$$

Osservazione sul logaritmo in base 10 e sul logaritmo naturale

Tra tutti gli infiniti sistemi di logaritmi assumono grande importanza quello di base 10, che viene comunemente chiamato dei logaritmi di Briggs, o decimali, e quello in base e (con la lettera e viene indicato un particolare numero irrazionale che ricorre assai spesso nelle matematiche superiori e nello studio teorico di molti fenomeni fisici, statistici, ecc., con un valore approssimato di $e = 2,718281828459\dots$ che viene chiamato dei logaritmi naturali o neperiani.

L'importanza dei logaritmi decimali è legato al fatto che, essendo il nostro sistema di rappresentazione numerica di tipo decimale, sono più facili la compilazione e l'uso di tavole numeriche.

Per il logaritmo in base 10 si usa la scrittura \log senza indicare esplicitamente la base.

$$\log(x) = \log_{10}(x)$$

L'importanza dei logaritmi naturali è dovuto al fatto che in molte leggi naturali, fisiche, statistiche, ecc., le grandezze in gioco sono tra loro legate da funzioni di tipo esponenziale a base e o di tipo logaritmico a base e .

Per logaritmo naturale si intende invece il logaritmo in base e e lo si indica con \ln

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

Questi due logaritmi sono molto importanti nei calcoli con la calcolatrice.

Infatti mediante le più comuni calcolatrici tascabili di tipo scientifico si possono determinare direttamente sia i logaritmi decimali, sia i logaritmi naturali. Per il loro calcolo si devono usare, rispettivamente, i tasti: \log e \ln

Proprietà dei logaritmi

Visto che i logaritmi possono essere scritti in forma esponenziale, e che per il calcolo con le potenze ci sono delle regole che possono essere applicate, allo stesso modo si possono trovare delle regole per il calcolo con i logaritmi:

$$\log_a a^n = n$$

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a(M^n) = n \cdot \log_a M$$

Proviamo a dimostrare la seconda proprietà:

$$\log(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

A tale scopo poniamo

$$\log_a M = x \text{ e } \log_a N = y$$

Per la definizione di logaritmo verranno allora anche le due uguaglianze

$$a^x = M \text{ e } a^y = N$$

Che moltiplicate membro a membro, danno:

$$a^x \cdot a^y = M \cdot N \text{ e quindi } a^{x+y} = M \cdot N$$

Il che equivale a dire (per la definizione di logaritmo) che

$$\log_a(M \cdot N) = x + y$$

e quindi, ricordando le posizioni fatte, che:

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

Esercizio: prova a dimostrare le altre proprietà

Osservazione: dietro le proprietà dei logaritmi ci stanno le proprietà delle potenze

- a) $\log_2(4 \cdot 8 \cdot 2) =$
- b) $\log_{10}20 + \log_{10}5 =$
- c) $\log_3 \frac{10}{3} =$
- d) $\log_5 100 - \log_5 2 =$
- e) $\log_3 7^2 =$
- f) $\log_2(2^5 \cdot 2^7) =$
- g) $2\log_3 4 =$

Esercizio: scrivi le seguenti espressioni sottoforma di un unico logaritmo.

- a) $\log_4(3z) + \log_4 x$ b) $\log_4 x - \log_4(7y)$
 c) $\frac{1}{3}\log_4 w$ d) $2\log_a x + \frac{1}{3}\log_a(x-2) - 5\log_a(2x+3)$
 e) $2\log\frac{y^3}{x} - 3\log y + \frac{1}{2}\log x^4 y^2$ f) $\ln y^3 + \frac{1}{3}\ln(x^3 y^6) - 5\ln y$

Soluzioni

- a) $\log_4 3zx$ b) $\log_4(\frac{x}{7y})$ c) $\log_4 \sqrt[3]{w}$
 d) $\log_a[\frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x-2}}{(2x+3)^5}]$ e) $\log y^4$ f) $\ln x$

La seguente formula permette di trasformare i logaritmi in base a in logaritmi aventi base b .

$$\log_a k = \frac{\log_b k}{\log_b a}$$

Esempi:

- a) $\log_5 7 = \frac{\ln 7}{\ln 5} =$
 b) $\log_2 25 = \frac{\log 25}{\log 2} =$
 c) $\log_7 521 =$
 d) $\log_2 10 =$

Equazioni logaritmiche

Chiamiamo equazioni logaritmiche ogni equazione nella quale compare il logaritmo dell'incognita o di espressioni contenenti l'incognita

Esempio 1

$$\log_6(4x - 5) = \log_6(2x + 1)$$

Esempi 2

$$\log_4(5 + x) = 3$$

Esercizio: Risolvi le seguenti equazioni:

1. $\log_4 x = \log_4(8 - x)$ $\{4\}$
2. $\log_3(x + 4) = \log_3(1 - x)$ $\{-\frac{3}{2}\}$
3. $\log_5(x - 2) = \log_5(3x + 7)$ $\{\phi\}$
4. $\log_{10} x^2 = 4$ $\{100\}$
5. $\ln 3^{(x+1)} = 5$ $\{3, 55\}$
6. $\log_a(2 - a) = \log_a(x - 4)$
7. $\log_a(x + 1) + \log_a x = \log_a(4 + x)$

Risoluzione di equazioni esponenziali, usando i logaritmi.

B) Se i due membri dell'equazione sono, o si possono mettere, sotto la forma di due potenze di base diversa, per risolvere l'equazione sarà necessaria l'applicazione dei logaritmi

Esempio 1: $3^x = 21$

Esempio 2: $5^{2x+1} = 6^{x-2}$

Esercizio: determina la soluzione esatta, usando i logaritmi decimali, e una soluzione approssimata a due cifre dopo la virgola, se questo è possibile.

- 1) $3^{x+4} = 2^{1-3x}$ $\{-1, 16\}$
- 2) $4^{2x+3} = 5^{x-2}$ $\{-6, 34\}$
- 3) $2^{2x-3} = 5^{x-2}$ $\{5, 11\}$
- 4) $3^{2-3x} = 4^{2x+1}$ $\{0, 13\}$
- 5) $2^{-x} = 8$ $\{-3\}$
- 6) $2^{-x^2} = 5$ $\{\}$

Approfondimento: il numero di Nepero e

Sebbene si chiami numero di Neper (John Neper, Scozia, 1550-1617), il dibattito sulla scoperta di questo numero è ancora aperto. La lettera "e" è stata posta in memoria di Eulero (1707-1783), matematico svizzero che calcolò il valore di e fino a 23 decimali.

Il numero $e = 2,71828$ viene utilizzato in parecchi casi come base per la funzione esponenziale.

Definizione: funzione esponenziale con base e

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = e^x$$

La funzione esponenziale con base e permette di descrivere parecchi fenomeni attraverso modelli matematici che contengono appunto la funzione esponenziale con base e .

Esempi

Crescita di una popolazione di batteri:

Il colera, una malattia che colpisce l'intestino, è causato dal batterio del colera. La popolazione di batteri cresce in modo esponenziale (per divisione delle cellule) approssimativamente come descrive il modello:

$$N = N_0 e^{1,386t}$$

dove N indica il numero di batteri presenti dopo t ore, N_0 il numero iniziale di batteri.

Se partiamo da un batterio, quanti batteri ci saranno tra a) 5 ore ? b) 12 ore ?

Rappresenta graficamente lo sviluppo del colera secondo il modello visto sopra, nelle prime 5 ore.

Esercizi

Calcolate utilizzando la calcolatrice: $e^1 = e = e^{-3 \cdot 256}$

La popolazione di una città nel 1970 era di 153800 abitanti. Ammettendo che quella popolazione cresca in modo esponenziale secondo l'equazione $N = N_0 e^{i \cdot t}$ dove il fattore di crescita i è il 5% all'anno, si preveda il numero di abitanti nel 2010.

Sotto certe condizioni la pressione atmosferica p (in mmHg) varia a dipendenza dell'altitudine h (in metri) secondo la formula $p = 734 \cdot e^{-0,000113 \cdot h}$. Qual è la pressione a 12000 m?

Altre situazioni vengono descritte attraverso modelli che contengono la funzione esponenziale.

QUI C'È LO SCHEMA GROSSO DA INSERIRE

Esercizi

Calcola il valore di n nella formula $M = C(1 + i)^n$

a) $M = 10000$, $C = 2500$, $i = 2,5\%$ [56a1m22g]

b) $M = 10404$, $C = 10000$, $i = 2\%$ [2a]

Calcola dopo quanto tempo, un capitale di 1000 CHF impiegato al tasso composto annuo del 5%, raddoppia. [14a2m15g]

Risolvi le seguenti equazioni:

- | | | |
|---|-----------------------------------|-----------------------------|
| a) $\log_7 3t^2 = 1$ | b) $\log_4 6^x = 2$ | c) $\log_7 (x + 2)^5 = 0$ |
| d) $\log_5 (4x^2 - 1) = \log_5 (2x + 1)$ | e) $\log_2 x^3 - 2 = 6$ | f) $5 - \log_3 3^{x-7} = 5$ |
| g) $\log(x^2 - x + 1) - \log(3x^2 - x - 5) = 0$ | h) $2^{x+1} \cdot 4^x = 8^{2x-4}$ | |

Serie esponenziali e logaritmi

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali

$$7^{x+1} = 49 \quad [1] \qquad 27^x = \frac{1}{3} \quad \left[-\frac{1}{3}\right] \qquad (0,1)^x = 1000 \quad [-3]$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 = \frac{8}{27} \quad \left[\frac{3}{2}\right] \qquad (a^{2x})^3 = a^{x^2} \quad [0; 6] \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \quad \left[-\frac{1}{3}\right]$$

$$3^x + 2^x = 0 \quad [\phi] \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = \left[\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}\right]^{-3} \quad [-12] \qquad \sqrt[3]{25^{1-x}} = \sqrt{5} \quad \left[\frac{1}{4}\right]$$

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{1-x} \quad \left[\frac{1}{3}\right] \qquad 6^{2x} = 216^{2x-1} \quad \left[\frac{3}{4}\right] \qquad 5^{x^2+x} = 25 \quad [-2; 1]$$

$$4^{\frac{x+2}{x}} = 16 \quad [2] \qquad 16^{1+\frac{x}{2}} = 4^{\frac{15}{x}} \quad [-5; 3] \qquad \frac{3^{x-1}}{9} = \frac{27^{1-x}}{3^{2+x}} \quad \left[\frac{4}{5}\right]$$

$$\frac{\sqrt[3]{32^x}}{(2^{x+2})^{x-2}} = 1 \quad \left[3; -\frac{4}{3}\right] \qquad x - \sqrt[4]{125} \cdot x + \sqrt[2]{5^8} = x - \sqrt[4]{25} \cdot 2^{2x-1} \sqrt[5]{5^9} \quad [2]$$

$$3^{x-2} \cdot 5^{x-2} = 1 \quad [2] \qquad 2^x \cdot 5^{2x-3} = \frac{1}{2^{x-3}} \quad \left[\frac{3}{2}\right] \qquad \frac{2^x \cdot 15}{2^{3x+1}} = 40 \cdot 3^{x-4} \quad [3]$$

$$2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7 \quad [2] \qquad 3^{x+1} + 3^{x-2} + 3^{x-1} + 3^{x+2} = 336 \quad [3]$$

$$3^{2+\sqrt{x}} + 3^{1+\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x}} = 99 \quad [4] \qquad 3^{2x} - 3^x - 6 = 0 \quad [1]$$

$$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \quad [1; 2] \qquad 3 \cdot 2^{2x-1} - 2^x = 4 \quad [1]$$

$$\frac{3^{2-x} - 3^{1-x}}{9^{x+1} - 3^{2x+1}} = 27^{1+3x} \quad \left[-\frac{1}{4}\right] \qquad \frac{1}{4^{1-3x}} + 2^{3x+1} = \frac{1}{4^{2-3x}} + 2^{3x+3} \quad \left[\frac{5}{3}\right]$$

$$6^x - 3^x - 3 \cdot 2^x + 3 = 0 \quad [0; 1] \qquad 9 \cdot 3^{2x} = 5^{x+1} \quad [-1]$$

Risolvi graficamente ed iterativamente le seguenti equazioni esponenziali

$$2^x - 1 = 2x \quad [0; 2, 65986] \qquad 5^x = 1 - x^2 \quad [0; -0, 86743] \qquad 3^x - 3x^2 = 0 \quad [-0.45073; 1; 3]$$

Calcola i seguenti logaritmi (senza la calcolatrice)

$$\log_4 64 = 3 \qquad \log_3 27 = 3 \qquad \log_6 \frac{1}{36} = -2 \qquad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2 \qquad \log_5 125 = 3$$

$$\log_{0,1} 0,01 = 2 \qquad \log_{12} \frac{1}{144} = -2 \qquad \log_2 \frac{1}{128} = 7 \qquad \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3} \qquad \log_{0,2} 0,04 = 2$$

$$\log_5\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \quad \log_2\sqrt[3]{\frac{1}{16}} = -\frac{4}{3} \quad \log_3\sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \quad \log_{0,3}\frac{100}{9} = -2 \quad \log_9\sqrt[5]{3} = \frac{1}{10}$$

Trova il numero conoscendo il logaritmo e la base

$$\log_{\frac{3}{5}}x = -1 \left[\frac{5}{3}\right] \quad \log_{\frac{3}{4}}x = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \log_3x = -\frac{2}{3} \left[3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right] \quad \log_{\frac{9}{25}}x = -\frac{1}{2} \left[\frac{5}{3}\right]$$

$$\log_ax = -\frac{3}{4} \left[4\sqrt[4]{\frac{1}{a^3}}\right] \quad \log_{\sqrt{3}}x = \frac{3}{4} \left[\sqrt[8]{27}\right] \quad \log_{0,5}x = 2 \left[\frac{1}{4}\right] \quad \log_{\sqrt{\frac{1}{3}}}x = -\frac{2}{3} \left[3\sqrt[3]{3}\right]$$

$$\log_{0,01}x = -3 \left[10^6\right] \quad \log_{\sqrt{a}}x = \frac{4}{5} \left[\sqrt[5]{a^2}\right] \quad \log_{\sqrt[3]{a^2}}x = -6 \left[\frac{1}{a^4}\right] \quad \log_{a^5}x = -\frac{3}{5} \left[\frac{1}{a^3}\right]$$

Determina la base dei seguenti logaritmi

$$\log_x 9 = -2 \left[\frac{1}{3}\right] \quad \log_x \frac{1}{8} = -3 \left[2\right] \quad \log_x \frac{81}{16} = 4 \left[\frac{3}{2}\right] \quad \log_x \frac{1}{27} = -3 \left[3\right]$$

$$\log_x \sqrt[5]{\frac{1}{4}} = -\frac{2}{5} \left[2\right] \quad \log_x \sqrt[5]{\frac{1}{9}} = -\frac{2}{5} \left[3\right] \quad \log_x \sqrt[10]{27} = -0,3 \left[\frac{1}{3}\right] \quad \log_x \frac{3}{5} = -\frac{1}{2} \left[\frac{25}{9}\right]$$

Calcola le espressioni usando le proprietà dei logaritmi

$$\log_4(\sqrt[3]{4} \cdot 4^5) = \frac{16}{3} \quad \log_2(\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{4}) = \frac{11}{12} \quad \log_3 \frac{81\sqrt[5]{27}}{\sqrt{3}} = \frac{41}{10} \quad \log_2 \frac{2^5\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{29}{6}$$

$$\log_3 \sqrt{3\sqrt{3}} = \frac{3}{4} \quad \log_2(4\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{2}}}) = \frac{5}{2} \quad \log_a(a\sqrt{a\sqrt{a}}) = \frac{7}{4}$$

$$\log_3 \sqrt[4]{27\sqrt[3]{\frac{1}{9\sqrt[3]{81}}}} + \log_5(125\sqrt{5\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{125}}}) + \log_3 \frac{\sqrt[3]{\frac{13\sqrt[3]{81}}{3}}}{\sqrt[4]{3\sqrt{\frac{1}{3}}}} = \frac{10}{3}$$

$$\log_6 \sqrt[3]{18\sqrt[4]{27} \cdot 27\sqrt{6}} + \log_2 \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{2\sqrt{\frac{1}{2}}}} + \log_{\frac{1}{2}}(8\sqrt[3]{4\sqrt{\frac{1}{8}}}) = -\frac{13}{6}$$

Trasforma applicando i teoremi sui logaritmi

$$\log(abc) = \log a + \log b + \log c \quad \log(3mn^2) = \quad \log(x+y)^2 = \quad \log\sqrt[3]{2a} =$$

$$\log[\sqrt{3}x(x+y)] = \quad \log \frac{a\sqrt{a\sqrt{b}}}{a+b} = \quad \log \sqrt{(a-b)\sqrt{a^2-b^2}} = \quad \log \frac{a^3+b}{a\sqrt{a}} =$$

$$\log\left(x^{24}\sqrt{\frac{xy}{\sqrt{x}}} \div \sqrt{\frac{x}{y}}\right) = [2\log x + \frac{3}{8}\log y] \quad \log^4 \sqrt{\frac{ab^2c\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt{abc}}} \div \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}} = [\frac{1}{6}\log a + \frac{19}{48}\log b + \frac{3}{32}\log c]$$

Cambia la base e semplifica

$$\log_4 8 = \frac{3}{2} \quad \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8} = \frac{3}{2} \quad \log_{\sqrt{5}}(25\sqrt{5}) = 5 \quad \log_{\sqrt{0,2}} \sqrt[3]{0,04} = \frac{4}{3}$$

$$\log_{4\sqrt[4]{2}} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{30} \quad \log_{a^2} \sqrt[3]{a^5} = \frac{5}{6} \quad \log_{\sqrt{a}}(a^4\sqrt{a}) = \frac{5}{2} \quad \log_{x^2\sqrt{x}}(x^3\sqrt{x\sqrt{x}}) = \frac{3}{2}$$

Dimostra che le seguenti eguaglianze sono vere ricordando che $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \qquad \log_3 5 + \frac{1}{2 \log_5 3} = \frac{3}{\log_5 9} \qquad \log_{ab} b = \frac{\log_a b}{1 + \log_a b}$$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali risolvibili con i logaritmi

$$3^x = 5 \left[\frac{\log 5}{\log 3} \cong 1,465 \right] \qquad 3^x \cdot 2^{1-x} = 18 \left[\cong 5,419 \right] \qquad 2^{x+1} = 5^{1-x} \left[\cong 0,398 \right]$$

$$\frac{2^{x+1} \cdot 5^{x-1}}{3^x} = 2 \left[\cong 1,337 \right] \qquad \frac{12^{1-x}}{3^{x+1}} = \frac{\sqrt{4^{1+3x}}}{6^{2+x}} \left[\cong 1,105 \right] \qquad \frac{10}{2^x} = 3^{1-x} + \frac{2}{3^x} \left[\cong -1,71 \right]$$

$$\frac{1}{7^{x+1}} + \frac{7^x}{49^x - 1} = \frac{2 \cdot 7^x - 1}{7^x - 1} \left[\cong -0,356 \right] \qquad \sqrt{3^{x-1}} + 7 \cdot 2^{x+1} = \frac{2^{x+1} \sqrt{3^x}}{\sqrt{3 \cdot 4^{x-2}}} \left[\cong -8,638 \right]$$

$$\frac{1 - 2^{x+1}}{2^x} + \frac{3 + 6 \cdot 2^x}{2^x + 2} = \frac{11}{4^x + 2^{x+1}} \left[\cong 0,585 \right] \qquad 12^x - 3 \cdot 4^x - 5 \cdot 3^x + 15 = 0 \left[1; \cong 1,161 \right]$$

$$\frac{2^x \cdot 15}{1 + 2^3} = 40 \cdot 3^{x-4} \left[3 \right] \qquad 3^{1+2x} + \frac{4}{3} = 4 \cdot 3^x \left[\cong -0,369 \right] \qquad 5 \cdot 3^{1-x} = \frac{36 - 3^{x+1}}{3^{2x}} + 2 \left[1; \cong 1,631 \right]$$

Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche

$$\log_5 x = \frac{1}{3} \left[\sqrt[3]{5} \right] \qquad \log_{27} x = -\frac{2}{3} \left[\frac{1}{9} \right] \qquad \log_3(3x - 4) = 2 \left[\frac{13}{3} \right] \qquad \log_2(x^2 + 3x + 4) = 2 \left[0; -3 \right]$$

$$\log_3(\sqrt{x-2} - 1) = 0 \left[6 \right] \qquad \log_x(2x - 1) = 2 \left[\phi \right] \qquad 4 \log_5 x = 3 \left[8 \right] \qquad \log_x(x^2 + 4x - 5) = 2 \left[\frac{5}{4} \right]$$

$$\log_4(x + 6) + \log_4 x = 2 \left[2 \right] \qquad \log_5(x^2 - 4) - \log_5(x + 2) = 2 \left[27 \right] \qquad 2 \log_2 x = 2 + \log_2(x - 1) \left[2 \right]$$

$$\log_2(3x + 1) - \log_2(x + 2) + 2 = \log_2(9x - 4) - \log_2 x \left[2; \frac{3}{4} \right]$$

$$\log(4x - 1) - \log(3x - 1) = \log(1 + x) - \log(1 - x) \left[\frac{3}{7} \right] \qquad \frac{1}{3} \log(x^3 - 8x + 5) = \log(x - 1) \left[3 \right]$$

$$\log(2x + 11) - \log(x + 4) - \log 2 = \log(1 - 3x) - \log(1 - x) \left[-3; -\frac{1}{4} \right]$$

$$\log(1 - \sqrt{x+2}) = \frac{1}{2} \log(3x + 7) \left[-2 \right] \qquad \frac{1}{2} \log_a(16 - x) = \log_a(x - 4) \left[a > 0 \text{ e } a \neq 1; 7 \right]$$

$$\log_2(x + 2) + \log_2 x = 3 \left[2 \right] \qquad \log_3(x + 1) + \log_{(x+1)} 3 = \frac{10}{3} \left[26; \sqrt[3]{3} - 1 \right]$$