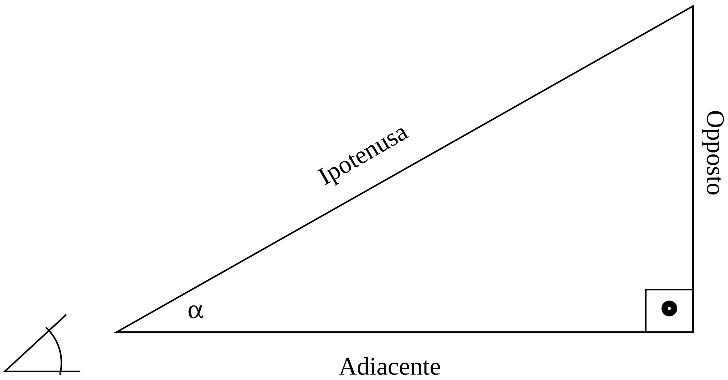


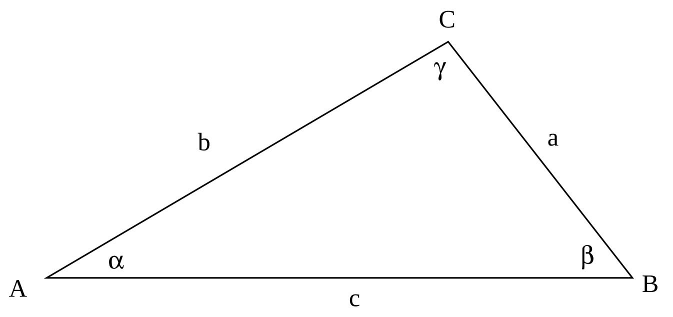

Tenendo a mente la seguente nomenclatura di un triangolo rettangolo si ha:

$\sin \alpha = \frac{\text{Opposto}}{\text{Ipotenusa}}$ $\cos \alpha = \frac{\text{Adiacente}}{\text{Ipotenusa}}$ $\tan \alpha = \frac{\text{Opposto}}{\text{Adiacente}}$ $\cot \alpha = \frac{\text{Adiacente}}{\text{Opposto}}$

## Angoli particolari

| Angolo orientato | | Funzione goniometrica | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| in gradi | in radianti | seno | coseno | tangente | cotangente |
| 0° | 0 | 0 | 1 | 0 | *non esiste* |
| 9° | $\frac{\pi}{20}$ | $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ |
| 15° | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | $2-\sqrt{3}$ | $2+\sqrt{3}$ |
| 18° | $\frac{\pi}{10}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ | $\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}}$ | $\sqrt{\frac{25-10\sqrt{5}}{5}}$ | $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ |
| 22°30′ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ | $\sqrt{2}-1$ | $\sqrt{2}+1$ |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 36° | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ | $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ | $\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 54° | $\frac{3\pi}{10}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$ | $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 72° | $\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ | $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ | $\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$ |
| 75° | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ | $2+\sqrt{3}$ | $2-\sqrt{3}$ |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | *non esiste* | 0 |

## Triangoli qualunque




Osservando la seguente nomenclatura per un triangolo qualsiasi si ha il teorema dei seni ($r$ è il raggio del cerchio circoscritto):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

e il teorema dei coseni (o teorema di Pitagora generale, infatti se $\alpha$ è 90° ...)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

## Angoli

a) Sistema di misura sessagesimale

L'unità di misura è il grado sessagesimale, cioè la 360-esima parte dell'angolo giro.

Sottounità: 1 grado si suddivide in 60 primi e un primo si suddivide in sessanta secondi

$1' = \frac{1}{60°} \cdot 1°$ $\qquad$ $1'' = \frac{1}{60} \cdot 1' = \frac{1}{3600} \cdot 1°$

Ad esempio l'ampiezza di 32 gradi, 45 primi e 12,6 secondi si indica: 32 45' 12,6"

A volte si usano sottounità decimali del grado:

$32° \, 45' \, 12,6'' = 32° + \frac{45}{60} \cdot 1° + \frac{12,6}{3600} \cdot 1° = 32.7535°$

b) Sistema di misura circolare (radianti)

I gradi sessagesimali usati soprattutto per calcoli trigonometrici elementari sono sostituiti dai radianti per applicazioni più complesse. Come unità di misura si assume il radiante. Un radiante è l'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

Quanto misura l'angolo giro in radianti?

La circonferenza di raggio $r$ misura $2\pi r \Rightarrow$ l'angolo giro $2\pi = 360°$

Quindi $2\pi = 360°$

Sia $\alpha$ un angolo espresso in radianti e $\alpha$ un angolo espresso in gradi, abbiamo che vale:

$\frac{360°}{2\pi} = \frac{\alpha°}{\alpha}$

## Esercizi - primo blocco

### Esercizi sugli angoli

Completa la seguente tabella

| Sessagesimali | Sessagesimali con frazione decimale | Radianti |
|---|---|---|
| $40°$ | | |
| $12°55'$ | | |
| $55°12'24''$ | | |
| $77°30'31.3''$ | | |
| | $44,50°$ | |
| | $89,05°$ | |
| | $35,8924°$ | |
| | | $\frac{\pi}{6}$ |
| | | $\frac{3}{2}\pi$ |
| | | $\frac{15}{8}\pi$ |
| | | $3.1415$ |
| | | $0.8$ |
| | | $6.05$ |

**Triangoli qualunque**

Trova tutti gli elementi mancanti dei seguenti triangoli qualunque, considerando che la nomenclatura di angoli e lati corrisponde a quella indicata nel disegno di sopra; teoricamente dovresti eseguire questo primo esercizio senza la calcolatrice!

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $a=6\sqrt{3}$ | $\alpha=60°$ | $\beta=45°$ | $[b=6\sqrt{2}; c=3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1); \gamma=75°]$ |
| 2 | $a=2$ | $c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ | $\alpha=75°$ | $[b=2; \beta=75°; \gamma=30°]$ |
| 3 | $b=3\sqrt{2}$ | $\beta=120°$ | $\alpha=45°$ | $[a=2\sqrt{2}; c=3-\sqrt{3}; \gamma=15°]$ |
| 4 | $a=2\sqrt{6}$ | $b=6\sqrt{2}$ | $\alpha=30°$ | $[c_1=4\sqrt{6}; \gamma_1=90°; \beta_1=60°/c_2=2\sqrt{6}; \gamma_2=30°; \beta_2=120°]$ |
| 5 | $a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ | $b=2\sqrt{2}$ | $c=2\sqrt{3}$ | $[\alpha=75°; \beta=45°; \gamma=60°]$ |
| 6 | $a=2\sqrt{3}$ | $b=3-\sqrt{3}$ | $c=3\sqrt{2}$ | $[\alpha=45°; \beta=15°; \gamma=120°]$ |
| 7 | $a=2\sqrt{3}+3$ | $b=\sqrt{3}$ | $\alpha=75°$ | $[c=\sqrt{2}(3+\sqrt{3}); \beta=15°; \gamma=90°]$ |
| 8 | $a=2\sqrt{3}$ | $\alpha=60°$ | $\beta=105°$ | $[b=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1); c=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1); \gamma=15°]$ |

Idem come sopra ma con la calcolatrice:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | $a=153,42$ | $b=200,86$ | $c=176,44$ | $[\alpha=47,4423°; \beta=78°8'56''; \gamma=53°26'42'']$ |
| 10 | $a=76,42$ | $\beta=36°20'10''$ | $\gamma=82°26'30''$ | $[b=51,78; c=86,67; \alpha=60°59'30'']$ |
| 11 | $a=90,84$ | $b=46,139$ | $\beta=30°31'30''$ | $[c=78,250; \alpha=90°; \gamma=59°28'30'']$ |
| 12 | $b=81,56$ | $c=73,52$ | $\alpha=84°26'30''$ | $[a=104,38; \beta=51°2'57''; \gamma=44°30'33'']$ |

**Triangoli rettangoli**

Esercizio analogo a quello precedente, ricordando che, riferendosi al triangolo riportato sopra, $\alpha$ è l'angolo retto e senza l'uso della calcolatrice.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $a=10$ | $\beta=60°$ | $[\gamma=30°; b=5\sqrt{3}; c=5]$ |
| 2 | $b=10$ | $a=10\sqrt{2}$ | $[c=10; \beta=\gamma=45°]$ |
| 3 | $b=20$ | $\beta=30°$ | $[\gamma=60°; a=40; c=20\sqrt{3}]$ |
| 4 | $a=14$ | $\beta=30°$ | $[\gamma=60°; b=7; c=7\sqrt{3}]$ |
| 5 | $b=9$ | $\gamma=45°$ | $[\beta=45°; a=9\sqrt{2}; c=9]$ |
| 6 | $c=2$ | $\gamma=60°$ | $[\beta=30°; a=\frac{4\sqrt{3}}{3}; b=\frac{2\sqrt{3}}{3}]$ |
| 7 | $c=6\sqrt{3}$ | $b=6$ | $[\beta=30°; \gamma=60°; a=12]$ |
| 8 | $a=40$ | $b=20$ | $[\beta=30°; \gamma=60°; c=20\sqrt{3}]$ |
| 9 | $a=10$ | $c=5\sqrt{3}$ | $[b=5; \beta=30°; \gamma=60°]$ |
| 10 | $a=5$ | $\beta=\arccos\frac{3}{5}$ | $[\gamma=\arcsin\frac{3}{5}; b=4; c=3]$ |
| 11 | $b=24$ | $\gamma=\arctan\frac{4}{3}$ | $[c=32; a=40; \beta=\arctan\frac{3}{4}]$ |
| 12 | $a=13$ | $\gamma=\arctan$ | $[b=5; c=12; \beta=\arcsin\frac{5}{13}$ |

## Problemi sul triangolo rettangolo

### Senza calcolatrice!

**Problema 1.** Il cateto AC di un triangolo ABC, rettangolo in A, misura b e cos $\gamma = \frac{12}{13}$. Determinare la misura del perimetro del triangolo. $[\frac{5b}{2}]$

**Problema 2.** Nel triangolo ABC, rettangolo in A, il cateto AB è di 24 cm e il seno dell'angolo a esso opposto è $\frac{4}{5}$; determinare il perimetro del triangolo [72 cm]

**Problema 3.** Risolvere un triangolo rettangolo sapendo che un cateto è di 24 cm e la sua proiezione sull'ipotenusa di 12 cm.

**Problema 4.** Determinare l'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente un angolo di 30° e il cateto adiacente a esso di $12\sqrt{3}$ cm. Determinare inoltre il perimetro e l'area del triangolo. $[6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}; 12(\sqrt{3}+3)\,\mathrm{cm}; 72\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2]$

**Problema 5.** Del triangolo rettangolo ABC ($\hat{A} = \alpha = 90°$) si conosce $\sin \widehat{\mathrm{ACB}} = \sin \gamma = \frac{3}{5}$ e AC=20 cm; sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa BC. Determinare la lunghezza dei segmenti AH e HB e l'area del triangolo AHC. $[12\,\mathrm{cm}; 9\,\mathrm{cm}; 96\,\mathrm{cm}^2]$

**Problema 6.** Nel rettangolo ABCD la diagonale BD=50 cm forma con il lato AB l'angolo $\widehat{\mathrm{ABD}} = \alpha$ di cui si conosce $\tan \alpha = \frac{4}{3}$. Determinare perimetro e area del rettangolo. $[140\,\mathrm{cm}; 1200\,\mathrm{cm}^2]$

**Problema 7.** Determinare il perimetro del triangolo rettangolo ABC sapendo che, detta H la proiezione sull'ipotenusa BC del vertice A, è AH=180 cm e che è $\cos \widehat{\mathrm{ACB}} = \frac{12}{13}$. [1170 cm]

**Problema 8.** Di un triangolo isoscele si conoscono il perimetro $7(2+\sqrt{2})$ cm e la base $7\sqrt{2}$ cm. Determinare l'ampiezza degli angoli. $[\alpha = 90°; \beta = \gamma = 45°]$

**Problema 9.** Determinare il perimetro di un triangolo isoscele ABC di cui si conosce l'altezza AH, di 21 cm, relativa alla base BC e il cui angolo al vertice, $\widehat{\mathrm{BAC}}$ è di 120°. $[42(2+\sqrt{3})\,\mathrm{cm}]$

**Problema 10.** La base minore DC di un trapezio rettangolo ABCD misura $6a$ e la base maggiore AB misura $30a$; si sa inoltre che l'angolo acuto $\widehat{\mathrm{ABC}} = \alpha$ ha la tangente goniometrica uguale a $\frac{7}{24}$. Determinare le misure del perimetro e dell'area del trapezio ABCD. $[68a; 126a^2]$

### Con calcolatrice

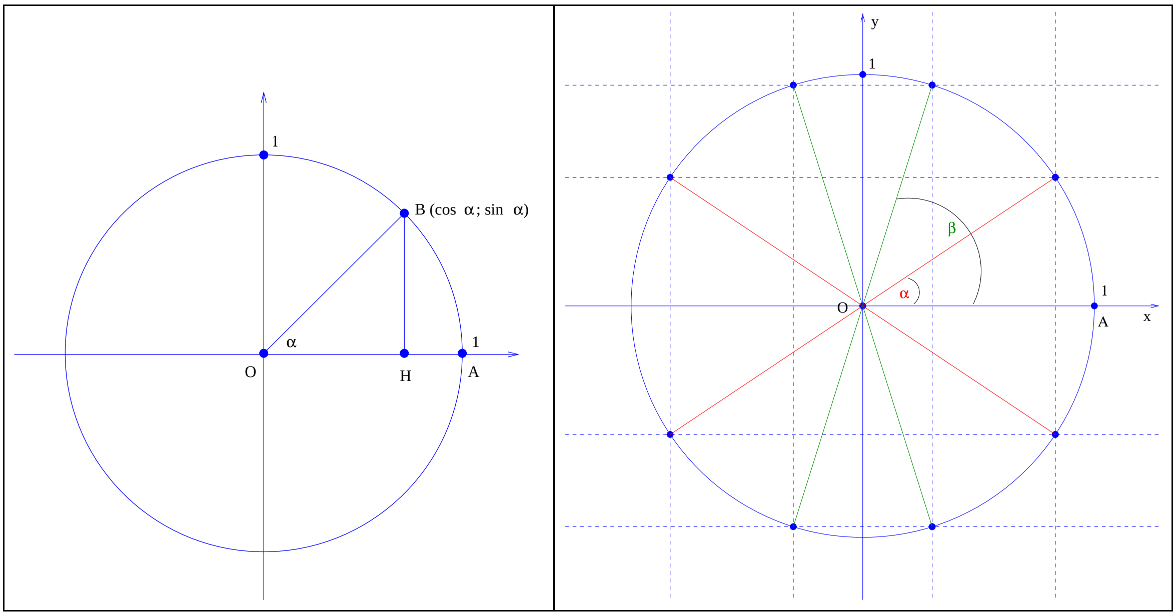
**Problema 11.** La proiezione ortogonale di un segmento AB sopra una retta $r$ è lunga 58,64 cm; trovare la misura del segmento AB sapendo che esso forma con la retta $r$ un angolo di $68,3361°$. $[158,85\,\mathrm{cm}]$

**Problema 12.** Risolvere un triangolo isoscele nota la base, di 12,76cm, e l'angolo al vertice $\alpha = 56,33°$.

$[13,52\,\mathrm{cm}]$

**Problema 13.** Risolvere un triangolo isoscele ABC nota la sua base BC=18,6 cm e l'angolo $\widehat{\mathrm{ABC}}$

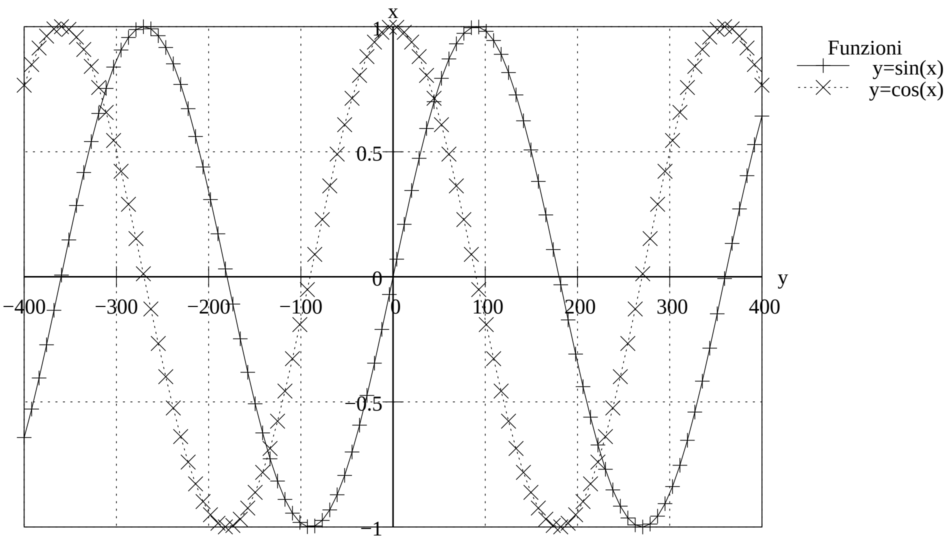
# Funzioni trigonometriche e cerchio trigonometrico

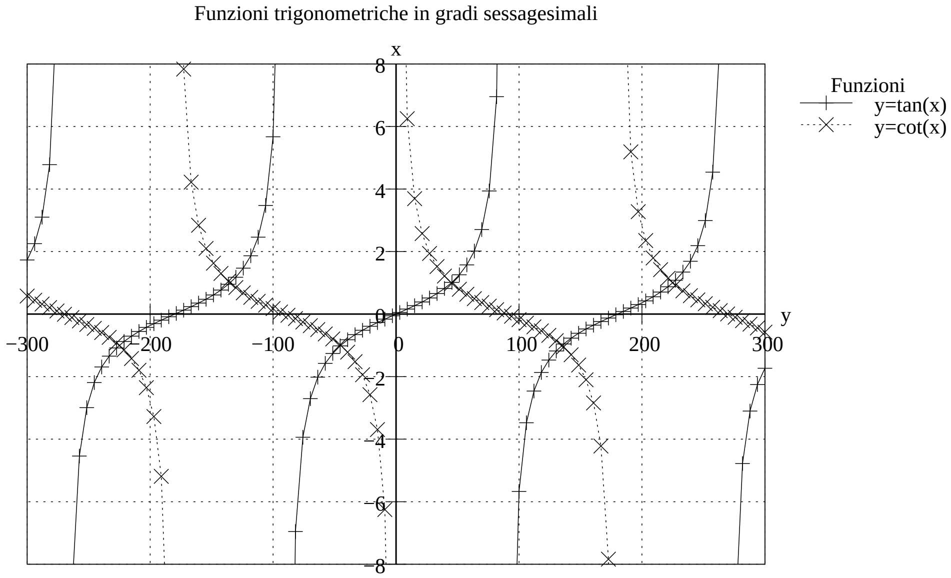



| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin(360+\alpha)=\sin(\alpha)$ | $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$ | $\cos(360+\alpha)=\cos(\alpha)$ | $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$ |
| $\sin(180-\alpha)=\sin(\alpha)$ | $\sin(180+\alpha)=-\sin(\alpha)$ | $\cos(180-\alpha)=-\cos(\alpha)$ | $\cos(180+\alpha)=-\cos(\alpha)$ |
| $\sin(360-\alpha)=-\sin(\alpha)$ | | $\cos(360-\alpha)=-\cos(\alpha)$ | |

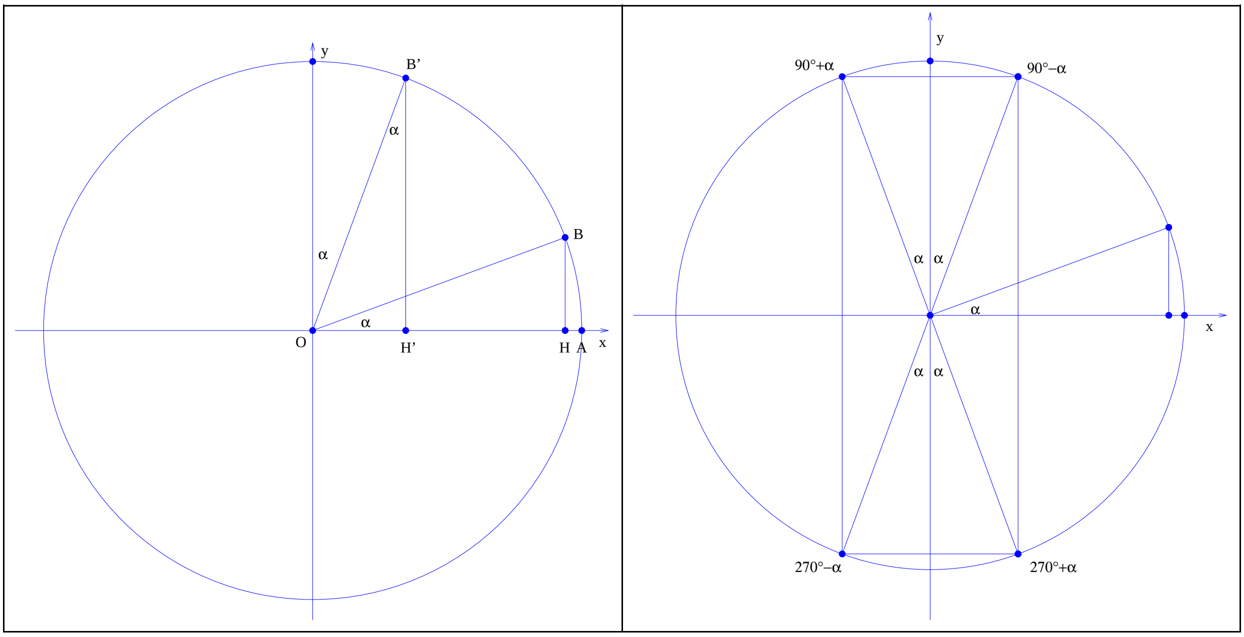
| | |
|---|---|
| $\tan(180+\alpha)=\tan(\alpha)$ | $\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$ |
| $\tan(180-\alpha)=-\tan(\alpha)$ | $\tan(180+\alpha)=\tan(\alpha)$ |
| $\tan(360-\alpha)=-\tan(\alpha)$ | |

Funzioni trigonometriche in gradi sessagesimali



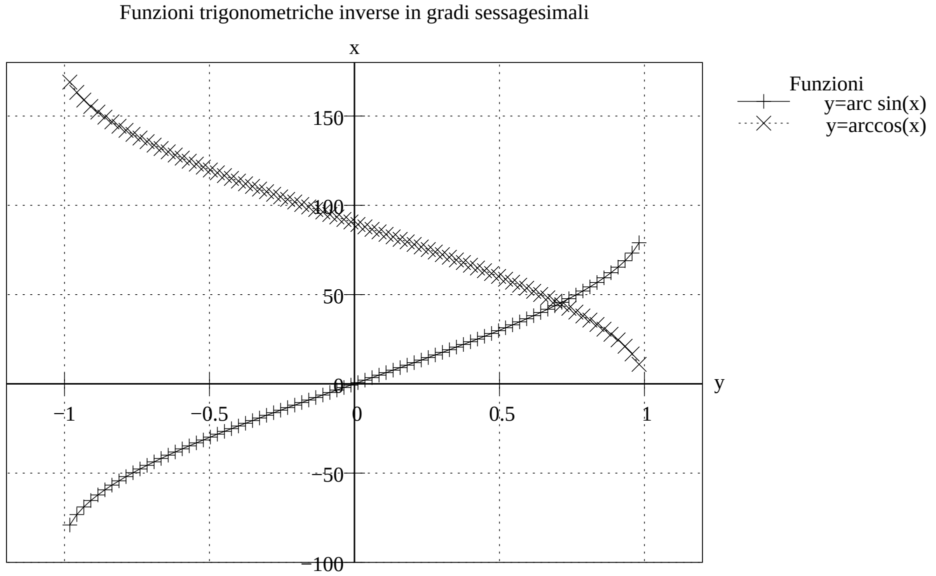


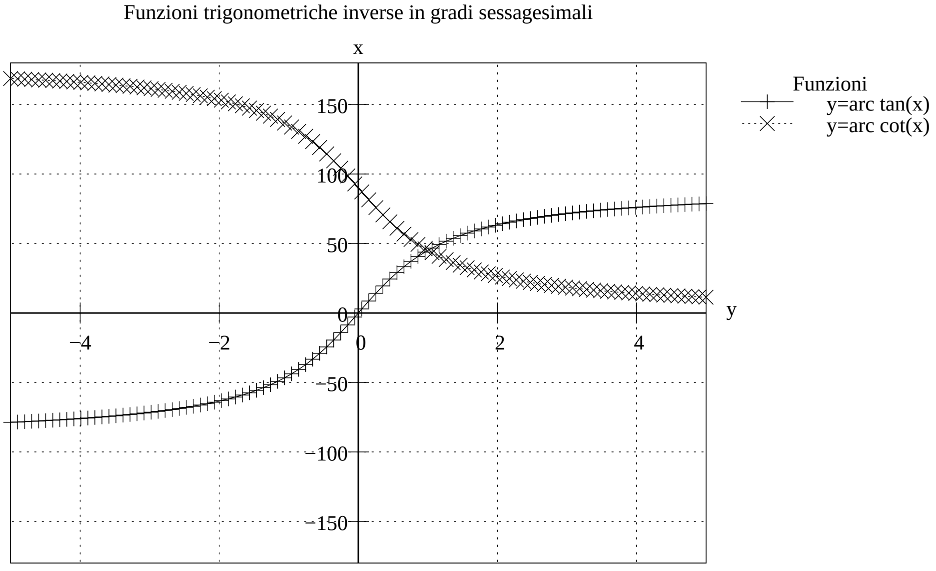

## Angoli complementari




| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sin(\alpha) = \cos(90 - \alpha)$ | $\sin(90 + \alpha) = \cos(\alpha)$ | $\sin(270 - \alpha) = -\cos(\alpha)$ | $\sin(270 + \alpha) = -\cos(\alpha)$ |
| $\cos(\alpha) = \sin(90 - \alpha)$ | $\cos(90 + \alpha) = -\sin(\alpha)$ | $\cos(270 - \alpha) = -\sin(\alpha)$ | $\cos(270 + \alpha) = \sin(\alpha)$ |
| $\tan(90 - \alpha) = \cot(\alpha)$ | $\tan(90 + \alpha) = -\cot(\alpha)$ | $\tan(270 - \alpha) = \cot(\alpha)$ | $\tan(270 + \alpha) = -\cot(\alpha)$ |

## Funzioni trigonometriche inverse




| Funzione | Dominio $\mathcal{D}_f$ | Immagini $\mathcal{I}_f$ |
|---|---|---|
| $y=\sin(x)$ | $]-\infty;+\infty[$ | $[-1;1]$ |
| $y=\cos(x)$ | $]-\infty;+\infty[$ | $[-1;1]$ |
| $y=\tan(x)$ | $\mathbb{R}\vert k\cdot 180+90, k\epsilon\mathbb{Z}$ | $]-\infty;+\infty[$ |
| $y=\cot(x)$ | $\mathbb{R}\vert k\cdot 180, k\epsilon\mathbb{Z}$ | $]-\infty;+\infty[$ |
| $y=\arcsin(x)$ | $[-1;1]$ | $[-90;90]$ |
| $y=\arccos(x)$ | $[-1;1]$ | $[0;180]$ |
| $y=\arctan(x)$ | $]-\infty;+\infty[$ | $[-90;90]$ |
| $y=\mathrm{arc}\cot(x)$ | $]-\infty;+\infty[$ | $[0;180]$ |

## Esercizi - secondo blocco

**Semplifica le seguenti espressioni senza l'uso della calcolatrice:**

$4\cos(180)+4\sin(90)+3\sin(180)=[0]$

$3\cos(90)-3\cos(0)+5\cos(180)=[-8]$

$\tan(540)-3\sin(270)+\cot(90)=[3]$

$\cos(270)-3\sin(180)+4\tan(180)=[0]$

$5\cos(0)-4(\sin(90)+3\cos(180))=[13]$

$\sin(\frac{3}{2}\pi)-2\cos(\pi)+\tan(2\pi)=[1]$

$3\cos\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{2}\tan 0=[2]$

$2\sin\frac{\pi}{2}-4(\sin\pi-4\cos\pi)+\cos\frac{3}{2}\pi-2\sin 2\pi=[-14]$

$(a^2-b^2)\cos\frac{3}{2}\pi+\frac{2ab}{\cos 16\pi}-\frac{a^2+b^2}{\sin\frac{3}{2}\pi}=[(a+b)^2]$

$m^2\sin\frac{3}{2}\pi-(m-n)^2\sin\frac{7}{2}\pi+\frac{2mn}{\sin\frac{\pi}{2}}=[n^2]$

**Disegna le seguenti funzioni trigonometriche su un grafico cartesiano**

$y=\sin(2x)$

$y=\cos(\frac{1}{2}x)$

$y=\tan(x+90)$

$y=\sin(x+180)$

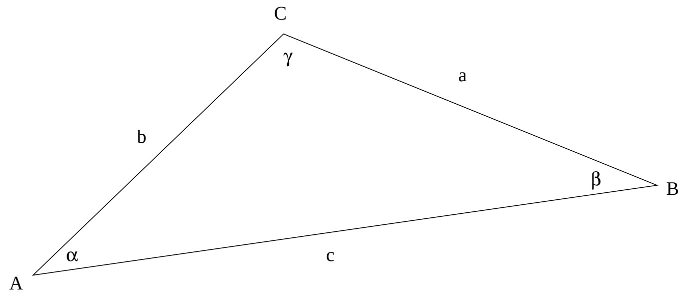
$y=3\cos(2x)$

$y=\frac{1}{2}\tan(\frac{x}{2}$

# Problemi sui triangoli

## Formule per i triangoli qualunque

Riferiti al triangolo qualunque rappresentato nell'immagine sottostante si hanno i due teoremi sul triangolo qualunque




### Teorema dei seni

In un triangolo qualunque, i rapporti tra la misura di ciascun lato e il seno dell'angolo opposto sono uguali (e corrisponde due volte il raggio del cerchio circoscritto). A questo teorema si associa quindi la seguente formula:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

### Teorema dei coseni (teorema di Pitagora generalizzato)

In un triangolo qualunque, il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma deiquadrati delle misure degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto della misura di questi due lati per il coseno dell'angolo fra essi compresi. Nuovamente si può espreimere questo teorema con una formula:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

### Esercizi sui triangoli qualunque

Trova tutti gli elementi mancanti dei seguenti triangoli qualunque, considerando che la nomenclatura di angoli e lati corrisponde a quella indicata nel disegno di sopra; teoricamente dovresti eseguire questo primo esercizio senza la calcolatrice!

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $a = 6\sqrt{3}$ | $\alpha = 60°$ | $\beta = 45°$ | $[b = 6\sqrt{2}; c = 3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1); \gamma = 75°]$ |
| 2 | $a = 2$ | $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ | $\alpha = 75°$ | $[b = 2; \beta = 75°; \gamma = 30°]$ |
| 3 | $b = 3\sqrt{2}$ | $\beta = 120°$ | $\alpha = 45°$ | $[a = 2\sqrt{2}; c = 3 - \sqrt{3}; \gamma = 15°]$ |
| 4 | $a = 2\sqrt{6}$ | $b = 6\sqrt{2}$ | $\alpha = 30°$ | $[c_1 = 4\sqrt{6}; \gamma_1 = 90°; \beta_1 = 60°/c_2 = 2\sqrt{6}; \gamma_2 = 30°; \beta_2 = 120°]$ |
| 5 | $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ | $b = 2\sqrt{2}$ | $c = 2\sqrt{3}$ | $[\alpha = 75°; \beta = 45°; \gamma = 60°]$ |
| 6 | $a = 2\sqrt{3}$ | $b = 3 - \sqrt{3}$ | $c = 3\sqrt{2}$ | $[\alpha = 45°; \beta = 15°; \gamma = 120°]$ |
| 7 | $a = 2\sqrt{3} + 3$ | $b = \sqrt{3}$ | $\alpha = 75°$ | $[c = \sqrt{2}(3+\sqrt{3}); \beta = 15°; \gamma = 90°]$ |
| 8 | $a = 2\sqrt{3}$ | $\alpha = 60°$ | $\beta = 105°$ | $[b = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1); c = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1); \gamma = 15°]$ |

Idem come sopra ma con la calcolatrice:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | $a = 153,42$ | $b = 200,86$ | $c = 176,44$ | $[\alpha = 47,4423°; \beta = 78°8'56''; \gamma = 53°26'42'']$ |
| 10 | $a = 76,42$ | $\beta = 36°20'10''$ | $\gamma = 82°26'30''$ | $[b = 51,78; c = 86,67; \alpha = 60°59'30'']$ |
| 11 | $a = 90,84$ | $b = 46,139$ | $\beta = 30°31'30''$ | $[c = 78,250; \alpha = 90°; \gamma = 59°28'30'']$ |
| 12 | $b = 81,56$ | $c = 73,52$ | $\alpha = 84°26'30''$ | $[a = 104,38; \beta = 51°2'57''; \gamma = 44°30'33'']$ |

## Esercizi sui triangoli rettangoli

Esercizio analogo a quello precedente, ricordando che, riferendosi al triangolo riportato sopra, $\alpha$ è l'angolo retto e senza l'uso della calcolatrice.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $a=10$ | $\beta=60°$ | $[\gamma=30°; b=5\sqrt{3}; c=5]$ |
| 2 | $b=10$ | $a=10\sqrt{2}$ | $[c=10; \beta=\gamma=45°]$ |
| 3 | $b=20$ | $\beta=30°$ | $[\gamma=60°; a=40; c=20\sqrt{3}]$ |
| 4 | $a=14$ | $\beta=30°$ | $[\gamma=60°; b=7; c=7\sqrt{3}]$ |
| 5 | $b=9$ | $\gamma=45°$ | $[\beta=45°; a=9\sqrt{2}; c=9]$ |
| 6 | $c=2$ | $\gamma=60°$ | $[\beta=30°; a=\frac{4\sqrt{3}}{3}; b=\frac{2\sqrt{3}}{3}]$ |
| 7 | $c=6\sqrt{3}$ | $b=6$ | $[\beta=30°; \gamma=60°; a=12]$ |
| 8 | $a=40$ | $b=20$ | $[\beta=30°; \gamma=60°; c=20\sqrt{3}]$ |
| 9 | $a=10$ | $c=5\sqrt{3}$ | $[b=5; \beta=30°; \gamma=60°]$ |
| 10 | $a=5$ | $\beta=\arccos\frac{3}{5}$ | $[\gamma=\arcsin\frac{3}{5}; b=4; c=3]$ |
| 11 | $b=24$ | $\gamma=\arctan\frac{4}{3}$ | $[c=32; a=40; \beta=\arctan\frac{3}{4}]$ |
| 12 | $a=13$ | $\gamma=\arctan$ | $[b=5; c=12; \beta=\arcsin\frac{5}{13}]$ |

Idem con la calcolatrice:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | $c=717,17$ | $\beta=47°49'18''$ | $[a=1068,11; b=791,53]$ |
| 14 | $b=150,86$ | $c=157,16$ | $[a=217,85; \beta=43,83°]$ |
| 15 | $a=51,2$ | $b=28,1$ | $[c=42,8; \beta=33,3°]$ |
| 16 | $a=217,85$ | $\gamma=46,1722°$ | $[\beta=43,8278°; b=150,86; c=157,16]$ |
| 17 | $b=72,54$ | $\beta=36,3375°$ | $[\gamma=53,6625°; c=98,62; a=122,42]$ |

## Problemi sul triangolo rettangolo

Senza calcolatrice!

**Problema 1.** Il cateto AC di un triangolo ABC, rettangolo in A, misura b e cos $\gamma=\frac{12}{13}$. Determinare la misura del perimetro del triangolo. $[\frac{5b}{2}]$

**Problema 2.** Nel triangolo ABC, rettangolo in A, il cateto AB è di 24 cm e il seno dell'angolo a esso opposto è $\frac{4}{5}$; determinare il perimetro del triangolo [72 cm]

**Problema 3.** Risolvere un triangolo rettangolo sapendo che un cateto è di 24 cm e la sua proiezione sull'ipotenusa di 12 cm.

**Problema 4.** Determinare l'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente un angolo di 30° e il cateto adiacente a esso di $12\sqrt{3}$ cm. Determinare inoltre il perimetro e l'area del triangolo. $[6\sqrt{3}\,\text{cm}; 12(\sqrt{3}+3)\,\text{cm}; 72\sqrt{3}\,\text{cm}^2]$

**Problema 5.** Del triangolo rettangolo ABC ($\hat{A}=\alpha=90°$) si conosce $\sin\widehat{ACB}=\sin\gamma=\frac{3}{5}$ e AC=20 cm; sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa BC. Determinare la lunghezza dei segmenti AH e HB e l'area del triangolo AHC. $[12\,\text{cm}; 9\,\text{cm}; 96\,\text{cm}^2]$

**Problema 6.** Nel rettangolo ABCD la diagonale BD=50 cm forma con il lato AB l'angolo $\widehat{ABD}=\alpha$ di cui si conosce $\tan\alpha=\frac{4}{3}$. Determinare perimetro e area del rettangolo. $[140\,\text{cm}; 1200\,\text{cm}^2]$

**Problema 7.** Determinare il perimetro del triangolo rettangolo ABC sapendo che, detta H la proiezione sull'ipotenusa BC del vertice A, è AH=180 cm e che è $\cos\widehat{ACB}=\frac{12}{13}$. [1170 cm]

**Problema 8.** Di un triangolo isoscele si conoscono il perimetro $7(2+\sqrt{2})$ cm e la base $7\sqrt{2}$ cm. Determinare l'ampiezza degli angoli. $[\alpha=90°; \beta=\gamma=45°]$

**Problema 9.** Determinare il perimetro di un triangolo isoscele ABC di cui si conosce l'altezza AH, di 21 cm, relativa alla base BC e il cui angolo al vertice, $\widehat{BAC}$ è di 120°. $[42(2+\sqrt{3})\,\text{cm}]$

**Problema 10.** La base minore DC di un trapezio rettangolo ABCD misura $6a$ e la base maggiore AB misura $30a$; si sa inoltre che l'angolo acuto $\widehat{\mathrm{ABC}} = \alpha$ ha la tangente goniometrica uguale a $\frac{7}{24}$. Determinare le misure del perimetro e dell'area del trapezio ABCD. $[68a; 126a^2]$

## Con calcolatrice

**Problema 11.** La proiezione ortogonale di un segmento AB sopra una retta $r$ è lunga 58,64 cm; trovare la misura del segmento AB sapendo che esso forma con la retta $r$ un angolo di $68,3361°$. $[158,85\,\mathrm{cm}]$

**Problema 12.** Risolvere un triangolo isoscele nota la base, di 12,76cm, e l'angolo al vertice $\alpha = 56,33°$.

$[13,52\,\mathrm{cm}]$

**Problema 13.** Risolvere un triangolo isoscele ABC nota la sua base BC=18,6 cm e l'angolo $\widehat{\mathrm{ABC}} = 47,3°$

$[13,71\,\mathrm{cm}]$

**Problema 14.** Risolvere un triangolo rettangolo sapendo che un angolo acuto è $28°$ e l'altezza relativa all'ipotenusa è lunga 15,84 cm.

**Problema 15.** Calcolare l'angolo formato dalle due tangenti condotte da uno stesso punto a una circonferenza il cui raggio è 28,6 cm, sapendo che la corda che unisce i punti di contatto è lunga 45,76 cm.

# Funzione di secondo grado: la parabola

Def: la funzione

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = ax^2 + bx + c$ dove $a, b, c \,\epsilon\, \mathbb{R}$ $e$ $a \neq 0$

definisce una funzione di secondo grado.

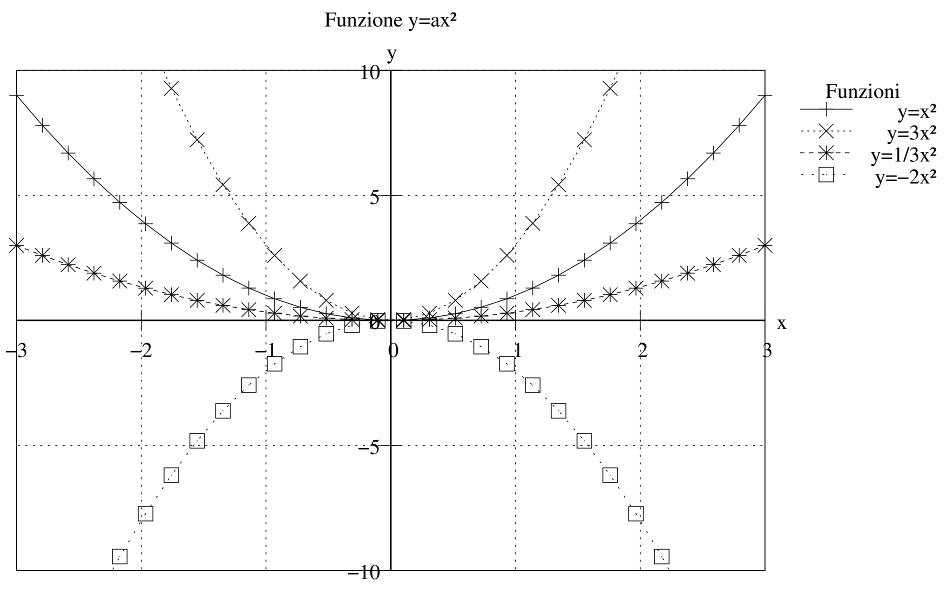
A seconda dei valori di a, b e c si distinguono alcuni casi che passiamo ora in rassegna.

## 1. La funzione $y = ax^2$ $(b = 0, c = 0)$

Rappresentiamo nel piano cartesiano le seguenti funzioni:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x) = x^2$ | $g(x) = 3x^2$ | $h(x) = \frac{1}{3}x^2$ | $i(x) = -2x^2$ |

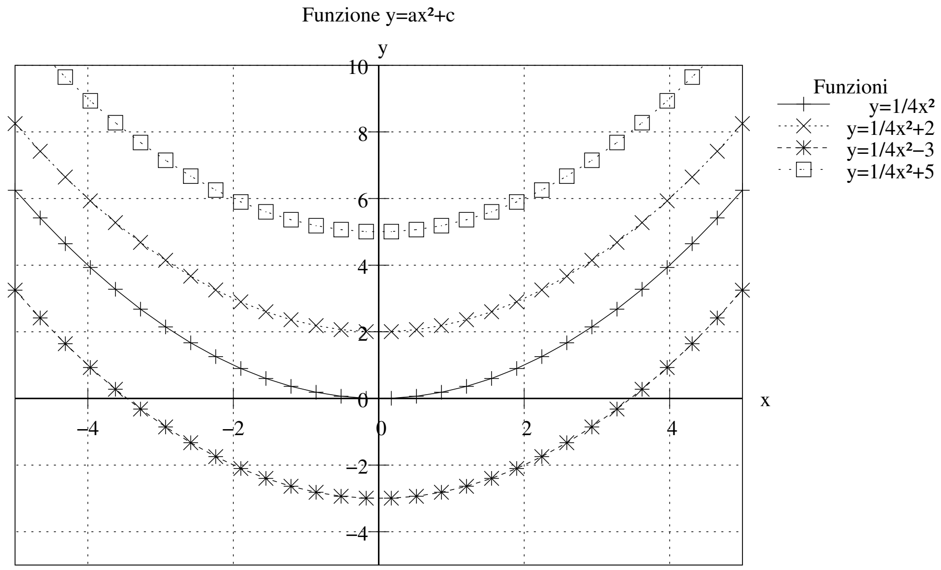
| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-2,5$ | $-2$ | $-1,5$ | $-1$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ | $1,5$ | $2$ | $2,5$ | $3$ |
| $f(x) =$ | $9$ | $6,25$ | $4$ | $2,25$ | $1$ | $0,25$ | $0$ | $0,25$ | $1$ | $2,25$ | $4$ | $6,25$ | $9$ |
| $g(x)=$ | $27$ | $18,75$ | $12$ | $6,75$ | $3$ | $0,75$ | $0$ | $0,75$ | $3$ | $6,75$ | $12$ | $18,75$ | $27$ |
| $h(x) =$ | $3$ | $2,08$ | $1,33$ | $0,75$ | $0,33$ | $0,08$ | $0$ | $0,08$ | $0,33$ | $0,75$ | $1,33$ | $2,08$ | $3$ |
| $i(x) =$ | $-18$ | $-12,5$ | $-8$ | $-4,5$ | $-2$ | $-0,5$ | $0$ | $-0,5$ | $-2$ | $-4,5$ | $-8$ | $-12,5$ | $-18$ |



**2. La funzione $y = ax^2 + c$ $(b = 0)$**

Rappresentiamo nel piano cartesiano le seguenti funzioni:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ | $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$ | $h(x) = \frac{1}{4}x^2 + 5$ | $i(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3$ |

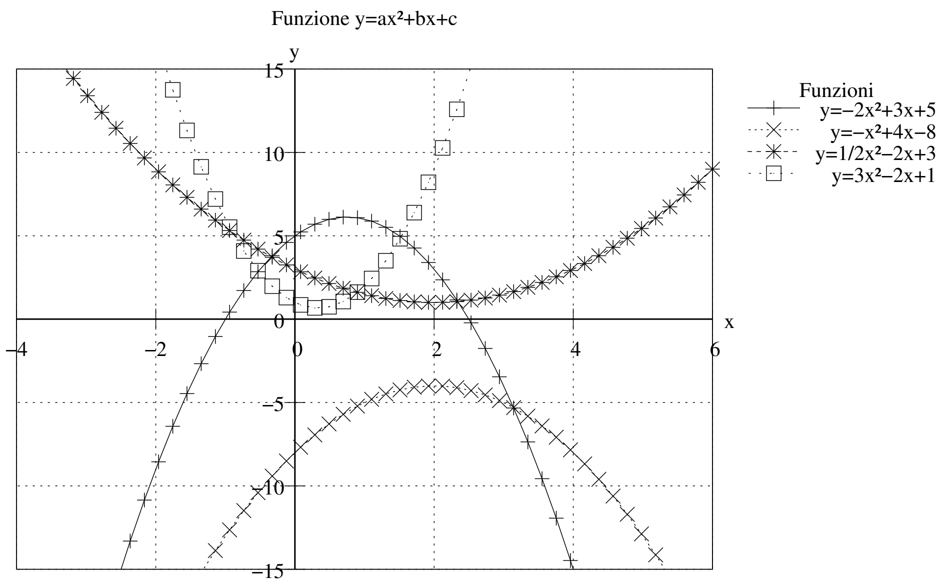



I grafici di $g, h$ e $i$ sembrano essere ottenuti mediante traslazione del grafico di $f$ lungo una direzione parallela all'asse $O_y$. Il valore di $c$ sta ad indicare se la traslazione è verso l'alto o verso il basso e di quante unità.

**3. La funzione $y = ax^2 + bx + c$ dove $a, b, c \neq 0$**

Rappresentiamo nel piano cartesiano le funzioni

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ | $g(x) = -x^2 + 4x - 8$ | $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ | $i(x) = 3x^2 - 2x + 1$ |

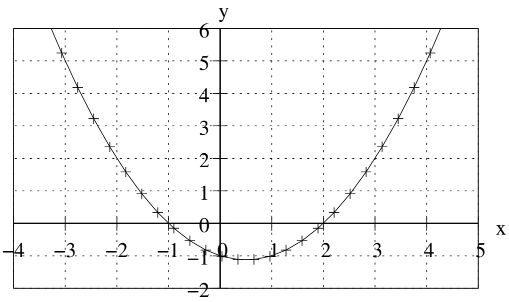


Se a < 0, la parabola è rivolta verso il basso.

Consideriamo una parabola che interseca l'asse x in due punti distinti e partiamo con un esempio: la funzione $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

Calcoliamo i punti di intersezione con l'asse $O_x$

Funzione y=1/2x²−1/2x−1




L'asse di simmetria passa a metà tra i due punti, dunque possiamo calcolare il punto medio.

Il valore di $x$ del vertice della parabola corrisponde al valore di $x$ del punto medio. Si può trovare l'ordinata del vertice per sostituzione.

**In generale:**

Si tratta di determinare $P_1(x_1; 0)$ e $P_2(x_2; 0)$ i due punti d'intersezione della parabola con l'asse $x$ dove $\Delta = b^2 - 4ac$. Ricordando la formula risolutiva di secondo grado si avrà:

$P_1 = (\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; 0)$ e $P_2 = (\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; 0)$

L'asse di simmetria (e quindi anche l'ascissa del vertice) passa a metà tra i due punti, dunque possiamo calcolare il punto medio:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a}$$

L'ordinata del vertice invece si trova per sostituzione:

$$y = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Il vertice della parabola è $V(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$ dove $\Delta = b^2 - 4ac$ oppure $V\left[-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a})\right]$

L'asse di simmetria della parabola è la retta di equazione $x = -\frac{b}{2a}$

**Esercizi:**

a) Determina il vertice e l'asse di simmetria della parabola di equazione $y = -x^2 - 2x + 4$ $[V(-1;5), x=-1]$

b) Considera la parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 3$. Qual è il suo vertice? E l'asse di simmetria? $V[(1;2), x=1]$

## 4. Considerazioni generali

Esempio: rappresenta graficamente la parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 4$

Per disegnare una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è importante:

- analizzare il segno del coefficiente a: se a >0, la parabola è rivolta verso l'alto; se a < 0, la parabola è rivolta verso il basso.

- calcolare il discriminante della parabola: $\Delta = b^2 - 4ac$

- calcolare le coordinate del vertice $V$ e l'equazione dell'asse di simmetria. Il vertice $V(x;y)$ è il punto d'incontro della parabola $f$ con il suo asse di simmetria $s$; è l'unico punto della parabola che non ha corrispettivi punti simmetrici. Se la parabola è rivolta verso l'alto $V$ è un minimo, se la parabola è rivolta verso il basso $V$ è un massimo.

- calcolare le intersezioni con gli assi cartesiani $O_y$ e $O_x$. Per $O_y$ si pone $x = 0$ e si risolve trovando $y$. Per $O_x$ si pone $y = 0$ e si risolve l'equazione di secondo grado, facendo attenzione al fatto che ci possono essere 2, 1 o 0 soluzioni a seconda del valore del discriminante.

Disposizione della parabola in base al segno di $\Delta$ di $a$:

| Segno di $a$ | $\Delta > 0$ | $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ |
|---|---|---|---|
| $a > 0$ | | | |
| $a < 0$ | | | |

Esercizio: rappresenta graficamente e separatamente le parabole di equazione:

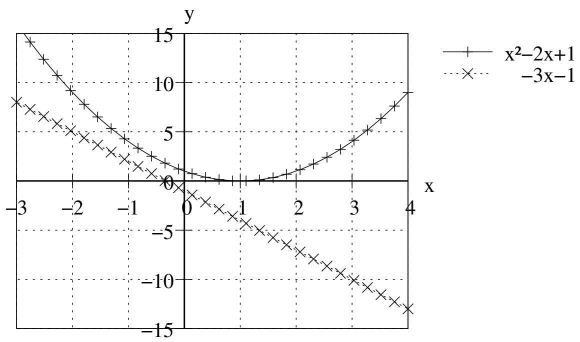
| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x) = -x^2 + 2x - 5$ | $g(x) = -x^2 + 9$ | $h(x) = 3x^2 + 6x$ | $i(x) = -x^2 + 4x - 4$ |

**5. Intersezioni di una retta e di una parabola.**

Siano $r: y = mx + q$ una retta e $p: y = ax^2 + \mathrm{bx} + c$ una parabola.

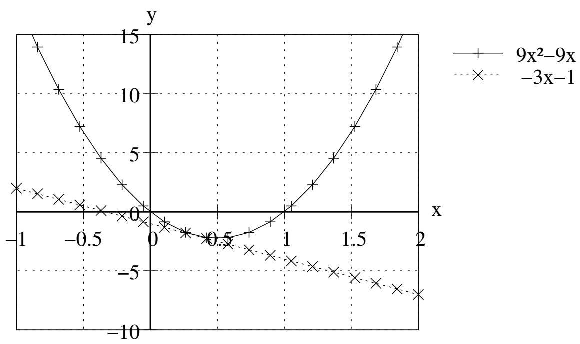
Chiediamoci quali posizioni possono avere reciprocamente tali curve.

Esempio 1: risolvi il sistema
$r(x) = -3x - 1$ e $p(x) = x^2 - 2x + 1$




Caso 1: la retta e la parabola non hanno alcun punto comune e la retta è esterna alla parabola. Algebricamente si traduce nel fatto che il seguente sistema di secondo grado non ha alcuna soluzione reale.

Esempio 2: risolvi il sistema
$r(x) = -3x - 1$ e $p(x) = 9x^2 - 9x$



Esempio 3: risolvi il sistema
$r(x) = 2x + 1$ e $p(x) = -2x^2 - 4x + 1$